УДК 537.6

Высокочастотная магнитная проницаемость системы полых сферических ферромагнитных частиц

А.О. Сбойчаков * [1]

[1] *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия*

Статья поступила в редакцию 15.01.2025
Одобрена после рецензирования 20.01.2025
Принята к публикации 28.02.2025

Аннотация

В работе исследуется высокочастотная магнитная проницаемость композитных материалов, состоящих из ферромагнитных частиц, помещенных в немагнитную диэлектрическую среду. Предполагается, что ферромагнитные частицы имеют сферическую форму, но не являются сплошными, а содержат в себе центральную полость, при этом толщина ферромагнитного слоя d много меньше диаметра частицы D. Ранее было показано [Современная электродинамика, № 5 (7), с. 15 (2023)], что при определенных условиях распределение намагниченности в такой частице не является однородным, а образует конфигурацию по типу вихря: намагниченность закручена в некоторой плоскости, а на полюсах частицы имеются магнитные домены с намагниченностью, перпендикулярной данной плоскости. Магнитная проницаемость композита, состоящего из таких частиц, была исследована нами в пределе невзаимодействующих частиц, а также при $d/D \ll 1$. Нами было показано, в частности, что частотная зависимость восприимчивости частицы во многом схожа с таковой у тонкой пленки. В то же время, колебания намагниченности частицы в переменном поле не являются однородными.

Ключевые слова: магнитные композитные материалы, магнитная проницаемость

EDN KDUWHA

doi:10.24412/2949-0553-2025-115-04-18

1. Введение

Магнитные композиты интересны как с фундаментальной точки зрения, так и для большого числа технических приложений, для многих из которых важно знать отклик системы на внешнее переменное магнитное поле. Внутренняя структура композитных материалов чрезвычайна разнообразна. В данной работе мы будем интересоваться материалами, состоящими из несоприкасающихся ферромагнитных частиц, часто имеющих сферическую или околосферическую форму, разделенных немагнитной диэлектрической матрицей. При этом, вследствие особенностей технологии изготовления, часто оказывается, что ферромагнитные частицы содержат в себе пустотелую область [1–6]. Характерные размеры таких частиц D могут меняться в широких пределах. Так, например, в работе [1] полученные в композитах частицы имели размеры порядка 500 нм с характерной толщиной ферромагнитного слоя $d \sim 80$ нм. Схожие [4, 6], или несколько большие ($D \sim 1$ мкм [5]) размеры частиц получались в материалах, исследованных в работах [4–6]. Были также синтезированы композиты с частицами больших ($D \sim 30$–100 мкм [2]) и меньших ($D \sim 100$ нм [3]) размеров. Отношение толщины ферромагнитного слоя d к размеру частицы также может варьироваться в широких пределах. Так, согласно Таблице 2 из работы [3], отношение d/D для различных образцов менялось от примерно 0.1 до примерно 0.3. Что касается более крупных частиц, исследованных в работе [2], то для них отношение d/D могло быть гораздо меньше и составлять величину порядка 0.05.

В данной работе мы будем ориентироваться на размеры частиц $D \sim 0.5$–1 мкм, характерные для композитов, синтезированных, в частности, в работах [4–6]. Такие размеры частиц являются не слишком большими, что говорит в пользу их однородной структуры, но и не слишком малыми, так что можно с

*Автор, ответственный за переписку: Артем Олегович Сбойчаков, sboycha@mail.ru

 ©2025 Сбойчаков А.О.

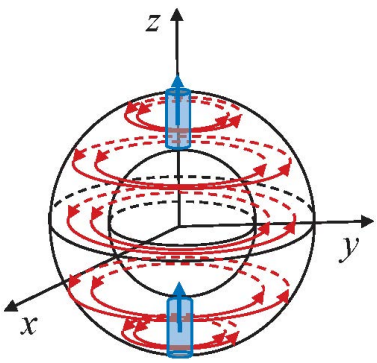

Рисунок 1 – Ферромагнитная частица с полостью. Границами ферромагнетика являются две центрированные сферы с радиусами R_1 и R_2. Центр сфер выбран в качестве начала координат. В рассматриваемой магнитной конфигурации намагниченность неколлинеарна, векторы намагниченности лежат в плоскости xy (везде за исключением области вблизи полюсов, где имеются два цилиндрических домена с намагниченностью вдоль оси z). В каждом разрезе частицы плоскостью, параллельной плоскости xy, векторы намагниченности образуют систему кругов так, как это схематически показано на рисунке

хорошей точностью считать выполненным условие $l_{ex}/D \ll 1$, где l_{ex} – обменная длина ферромагнетика, составляющая величину порядка нескольких нанометров [7] (так, например, в работе [8] для железа была получена оценка $l_{ex} \sim 7$ нм). Мы будем моделировать ферромагнитные частицы шарами с полостью. Внешний радиус шара есть R_2, а внутренний – R_1, при этом $d = R_2 - R_1$ есть толщина ферромагнитного слоя в частице. Сферы с радиусами R_1 и R_2 центрированы. Для дальнейшего нам будет удобно также ввести величину $R_0 = (R_2 + R_1)/2$ – радиус центрального слоя. Таким образом, для рассматриваемых размеров частиц мы имеем $l_{ex}/R_0 \sim 10^{-2} \ll 1$. Кроме этого условия, в данной работе мы ограничимся рассмотрением частного случая тонкого ферромагнитного слоя, когда $d/R_0 \ll 1$. Более общий случай будет рассматриваться нами отдельно. В работе мы также пренебрегаем скин-эффектом (применимость данного приближения обсуждается нами в разделе 6).

В работе [8] было показано, что при рассматриваемых условиях распределение намагниченности в частице неоднородно, но образует структуру по типу вихря: за исключением области вблизи полюсов векторы намагниченности лежат в одной плоскости (будем считать ее плоскостью xy) и направлены по касательной к поверхности частицы. Вблизи же полюсов имеются два домена с векторами намагниченности, направленными параллельно оси z частицы. Характерные размеры доменов $r_0 \times r_0 \times d$, где $r_0 \sim l_{ex}$. Схематически такая структура представлена на рисунке 1. Такая конфигурация в целом похожа на ту, что была получена микромагнитными расчетами в работе [9] (см. рисунок 4 из указанной работы).

Поскольку намагниченность в частице пространственно неоднородна, то и колебания векторов намагниченности под действием переменного магнитного поля также будут неоднородными. Это обстоятельство учитывается нами при нахождении восприимчивости как частицы, так и композита в целом. План данной работы следующий. В разделе 2 нами будет выведено линеаризованное уравнение Ландау-Лифшица для описанной выше магнитной конфигурации. В разделе 3 будет получена формула для магнитной проницаемости композита. Будут проанализированы результаты численного расчета магнитной проницаемости, а также характер колебаний намагниченности в поле с частотой, соответствующей основному резонансу. В разделе 4 будет выведена аналитическая формула для магнитной проницаемости композита в пределе $d \to 0$ и $l_{ex}/R_0 \to 0$. В разделе 5 рассматриваются собственные колебания частицы. Проводится анализ устойчивости рассматриваемой конфигурации. Раздел 6 посвящен обсуждению полученных результатов. Некоторые детали расчетов вынесены в Приложение.

2. Уравнение Ландау-Лифшица для сферической частицы с полостью

Мы стартуем с уравнений Ландау-Лифшица, которые имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \mathbf{M} \times \frac{\delta U}{\delta \mathbf{M}} + \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} - \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{h}\,, \tag{1}$$

где $\mathbf{M}$ – намагниченность частицы, M_s – намагниченность насыщения, γ – гиромагнитное отношение, α – параметр затухания, U – полная магнитная энергия частицы, а $\mathbf{h}$ – внешнее переменное магнитное поле. Магнитная энергия частицы U включает в себя три слагаемых[1], $U = U_m + U_a + U_{ex}$, где

[1] Мы пренебрегаем здесь энергией доменной стенки между цилиндрическими доменами и основной частью частицы.

U_m – магнитостатическая энергия, U_a – энергия магнитной анизотропии, а U_{ex} – энергия обменного взаимодействия. Рассмотрим сначала энергию магнитной анизотропии. Мы будем считать, что частица обладает одноосной магнитной анизотропией, так что можно написать [7] [здесь и далее по двойным индексам (например $\alpha = x,\, y,\, z$) подразумевается суммирование]

$$U_a = -\frac{\beta}{2}\int\limits_V d^3\mathbf{r}\, M^\alpha N_{\alpha\beta} M^\beta\,, \tag{2}$$

где $\beta = H_a/M_s$ (H_a – поле анизотропии), а $N_{\alpha\beta}$ – тензор магнитной анизотропии, зависящий, вообще говоря, от координат. В работе мы будем считать, что в каждой точке ось анизотропии направлена по касательной к границам разреза частицы плоскостью, параллельной плоскости xy, т.е. в равновесной конфигурации, изображенной на рисунке 1, направление намагниченности (везде кроме цилиндрических доменов) и ось анизотропии совпадают. Для такой конфигурации тензор анизотропии можно записать в матричном виде как

$$\hat{N}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где φ – азимутальный угол сферической системы координат. Магнитостатическая энергия имеет вид [7]

$$U_m = -\frac{1}{2}\int\limits_V d^3\mathbf{r}\, \mathbf{M}\mathbf{H}^{\text{in}}[\mathbf{M}]\,, \quad \mathbf{H}^{\text{in}}[\mathbf{M}] = -\frac{\partial\Psi[\mathbf{M}]}{\partial\mathbf{r}}\,, \tag{4}$$

где $\Psi[\mathbf{M}]$ – потенциал магнитного поля, создаваемого магнитными моментами частицы. Он равен

$$\Psi[\mathbf{M}] = -\int\limits_V d^3\mathbf{r}'\,\frac{\operatorname{div}'\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int\limits_S d\mathbf{S}'\,\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int\limits_V d^3\mathbf{r}'\,\mathbf{M}(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,. \tag{5}$$

Наконец, обменная энергия равна [7]

$$U_{ex} = \frac{l_{ex}^2}{2}\int\limits_V d^3\mathbf{r}\,\frac{\partial M^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\beta}\,. \tag{6}$$

Во всех формулах выше трехмерные интегралы берутся по объему ферромагнитной области частицы V, а поверхностный интеграл – по ее внутренней и внешней поверхностям.

Поскольку частица имеет сферическую форму, в дальнейшем нам будет удобно перейти от декартовой системы координат $x^\alpha = \{x,\, y,\, z\}$ к сферической $x^a = \{r,\, \theta,\, \varphi\}$. Кроме того, мы также будем работать с векторами в сферической системе координат. Как известно [10], последние связаны с векторами в декартовой системе координат выражениями

$$A^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^b}A^b\,, \quad A^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^\beta}A^\beta\,. \tag{7}$$

Аналогичные формулы можно написать для тензоров второго ранга. Опускание индексов a осуществляется с помощью метрического тензора

$$g_{ab} = \operatorname{diag}(1,\, r^2,\, r^2\sin^2\theta)\,. \tag{8}$$

Так, в сферической системе координат тензор анизотропии принимает вид

$$N_{ab} = r^2\sin^2\theta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

при этом энергия анизотропии равна

$$U_a = -\frac{\beta}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r^4 dr \int d\Omega\, \sin^2\theta\,(M^\varphi)^2\,, \tag{10}$$

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Потенциал магнитного поля можно переписать в виде

$$\Psi[\mathbf{M}] = \int\limits_{R_1}^{R_2} r'^2 dr' \int d\Omega'\, M^a(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial x'^a}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,. \tag{11}$$

Энергия же обменного взаимодействия примет вид

$$U_{ex} = \frac{l_{ex}^2}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int d\Omega\, M^a_{;b} M^{;b}_a = \frac{l_{ex}^2}{2}\int d\Omega\, \left[r^2 M^a M^{;r}_a\right]\Big|_{r=R_1}^{r=R_2} - \frac{l_{ex}^2}{2}\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int d\Omega\, M^a M^{;b}_{a\ ;b}\,, \tag{12}$$

где в последнем равенстве мы явно выделили поверхностный и объемный вклады в энергию обменного взаимодействия. В уравнении (12), символ ';' означает ковариантную производную [10]. Наконец, в сферической системе координат уравнения Ландау-Лифшица выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial M^a}{\partial t} = \sqrt{g} g^{ab}\epsilon_{bcd} M^c \left[\gamma g^{de}\frac{\delta U}{\delta M^e} + \frac{\alpha}{M_s}\frac{\partial M^d}{\partial t} - h^d\right], \tag{13}$$

где $\sqrt{g} = r^2 \sin\theta$, а ϵ_{bcd} – абсолютно антисимметричный псевдотензор ($\epsilon_{r\theta\varphi} = 1$).

Наша задача – найти линейный отклик системы на переменное магнитное поле. Для этого надо линеаризовать уравнение (13), представив намагниченность в виде $M^a = M^a_0 + m^a(t)$, где M^a_0 – равновесная намагниченность частицы. Следуя работе [8], мы будем считать, что вне магнитных доменов равновесная намагниченность частицы равна

$$M^a_0 = \frac{M_s}{r\sin\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

т.е. отлична от нуля только φ компонента намагниченности. Далее, в работе [8] было также показано, что продольные размеры r_0 доменов, расположенных на полюсах частицы, малы ($r_0 \sim l_{ex} \ll R_0$). Поэтому далее мы будем пренебрегать наличием этих доменов там, где это возможно. Так, нетрудно убедится в том, что в пренебрежении магнитными доменами мы имеем $\Psi[\mathbf{M}_0] = 0$. Энергия магнитной анизотропии в равновесии равна $U_a = -\beta M_s^2 V/2$. Что касается обменной энергии, то она логарифмически расходится на полюсах частицы, т.е. при $\theta \to 0$ или π, если мы распространим выражение (14) на всю область определения. Поэтому при вычислении обменной энергии мы будем проводить интегрирование по θ в пределах $l_{ex}/R_0 < \theta < \pi - l_{ex}/R_0$, считая, что вклад в U_{ex} от магнитных доменов мал. С учетом всего вышесказанного можно показать, что с хорошей точностью соблюдается равенство

$$\epsilon_{abc} M^b g^{cd}\, \frac{\delta U[\mathbf{M}]}{\delta M^d}\Big|_{\mathbf{M}=\mathbf{M}_0} = 0\,, \tag{15}$$

т.е. конфигурация (14) действительно соответствует некоторому экстремуму энергии. В разделе 5 мы покажем, что этот экстремум есть минимум (вообще говоря, необязательно глобальный). Помимо (15) соблюдаются также и граничные условия к уравнению Ландау-Лифшица, следующие из выражения для поверхностного члена в обменной энергии [7],

$$\epsilon_{abc} M^b M^{c;r}\big|_{\substack{\mathbf{M}=\mathbf{M}_0 \\ r=R_{1,2}}} = 0\,. \tag{16}$$

Разлагая уравнение (13) вокруг M^a_0 до первого порядка по $m^a(t)$ можно получить линеаризованные уравнения Ландау-Лифшица. Нам, однако, будет удобнее работать не с вектором m^a, компоненты которого имеют разную размерность, а с объектом, определенным как (нет суммирования)

$$\tilde{m}^a = \begin{pmatrix} m^r \\ rm^\theta \\ rm^\varphi \end{pmatrix}, \quad \tilde{m}^a = \varkappa^a m^a\,, \quad \varkappa^a = \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ r \end{pmatrix}, \quad \tilde{m}_a = \frac{1}{\varkappa^a} m_a\,. \tag{17}$$

Объекты типа $\tilde{m}^a$ не являются векторами (назовем их "псевдовекторами") в том смысле, что они не преобразуются при преобразовании координат согласно выражению (7), но зато все компоненты $\tilde{m}^a$ имеют одинаковую размерность, совпадающую с таковой в декартовой системе координат. Аналогично можно ввести ковариантные и контрвариантные "псевдотензоры" второго ранга. Подставляя формулы (4), (10) – (12), (14) и (17) в уравнение (13) и линеаризуя по $\tilde{m}^a$, получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\omega_s}\frac{\partial \tilde{m}^\theta}{\partial t} + \frac{\alpha}{\omega_s}\frac{\partial \tilde{m}^r}{\partial t} + \beta\tilde{m}^r - \frac{\partial \Psi[\tilde{\mathbf{m}}]}{\partial r} - l_{ex}^2\left[\Delta\tilde{m}^r + \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 2\right)\frac{\tilde{m}^r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial \tilde{m}^\theta}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\tilde{m}^\theta\right)\right] = \tilde{h}^r\,, \\ &\frac{1}{\omega_s}\frac{\partial \tilde{m}^r}{\partial t} + \frac{\alpha}{\omega_s}\frac{\partial \tilde{m}^\theta}{\partial t} + \beta\tilde{m}^\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi[\tilde{\mathbf{m}}]}{\partial\theta} - l_{ex}^2\left[\Delta\tilde{m}^\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \tilde{m}^r}{\partial\theta}\right] = \tilde{h}^\theta\,, \end{aligned} \tag{18}$$

где Δ – оператор Лапласа, $\omega_s = \gamma M_s$, а

$$\Psi[\tilde{\mathbf{m}}] = \int\limits_{R_1}^{R_2} r'^2 dr' \int d\Omega' \left(\tilde{m}^r(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{\tilde{m}^\theta(\mathbf{r}')}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \right) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \,. \tag{19}$$

Отметим, что ввиду рассматриваемой равновесной магнитной конфигурации (14), φ компонента намагниченности выпала из уравнений (18), для нее мы имеем всегда $\tilde{m}^\varphi = 0$. Граничные условия к данной системе уравнений получаются из уравнения (16) подстановкой $M^a = M_0^a + \tilde{m}^a/\kappa^a$ и линеаризацией по $\tilde{m}^a$. С учетом того, что для рассматриваемой равновесной конфигурации $M_0^{a;r} = 0$ граничные условия сводятся к (сравните, например, с [11, 12])

$$\left.\frac{\partial \tilde{m}^r}{\partial r}\right|_{r=R_{1,2}} = 0 \,, \quad \left.\frac{\partial \tilde{m}^\theta}{\partial r}\right|_{r=R_{1,2}} = 0 \,. \tag{20}$$

Итак, мы получили систему двух линейных интегро-дифференциальных уравнений на компоненты $\tilde{m}^r$ и $\tilde{m}^\theta$. Мы будем решать эту систему путем разложения компонент намагниченности в ряд по ортогональным функциям

$$\tilde{m}^a(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \tilde{m}^{aklm} f_k(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \,, \tag{21}$$

где $Y_l^m(\theta, \varphi)$ – сферические гармоники. Что касается радиальных функций, то они должны быть, во-первых, ортогональны с весом r^2, т.е.

$$\frac{1}{V} \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 dr f_k(r) f_{k'}(r) = \delta_{kk'} \,, \tag{22}$$

а во-вторых, удовлетворять граничным условиям

$$\left.\frac{\partial f_k(r)}{\partial r}\right|_{r=R_{1,2}} = 0 \,, \tag{23}$$

следующим из условий (20). Способ построения таких функций описывается нами в Приложении. Преобразование, обратное (21), есть

$$\tilde{m}^{aklm} = \frac{1}{V} \int\limits_V d^3\mathbf{r}\, \tilde{m}^a(\mathbf{r}) f_k(r) Y_l^m(\theta, \varphi)^* \,. \tag{24}$$

Подставляя (21) в уравнение (18), умножая обе части на $f_k(r) Y_l^m(\theta, \varphi)^*$ и интегрируя по объему частицы, после простых, но громоздких вычислений, получаем

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\omega_s} \frac{\partial \tilde{m}^{\theta klm}}{\partial t} + \frac{\alpha}{\omega_s} \frac{\partial \tilde{m}^{rklm}}{\partial t} + \beta \tilde{m}^{rklm} + \sum_{k'=0}^{\infty} \left[\frac{4\pi F_{kk'l}^{rr}}{2l+1} + a_{ex}^2 \left(G_{kk'}^r + (l^2 + l + 2) G_{kk'}^0 \right) \right] \tilde{m}^{rk'lm} \\
&-(a_{ex}^{(m)})^2 \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{l'=|m|}^{\infty} L_{ll'}^{(m)}(a_{ex}) G_{kk'}^0 \tilde{m}^{rk'l'm} + \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{l'=|m|}^{\infty} \left[\frac{4\pi F_{kk'l}^{r\theta}}{2l+1} - a_{ex}^2 G_{kk'}^0 \right] D_{ll'}^{(m)} \tilde{m}^{\theta k'l'm} = \tilde{h}^{rklm}, \\
&\frac{1}{\omega_s} \frac{\partial \tilde{m}^{rklm}}{\partial t} + \frac{\alpha}{\omega_s} \frac{\partial \tilde{m}^{\theta klm}}{\partial t} + \beta \tilde{m}^{\theta klm} + \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{l'=|m|}^{\infty} \left[\sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{4\pi F_{kk'n}^{\theta\theta}}{2n+1} D_{nl}^{(m)*} D_{nl'}^{(m)} + \right. \\
&\left. + a_{ex}^2 \delta_{ll'} \left(G_{kk'}^r + l(l+1) G_{kk'}^0 \right) \right] \tilde{m}^{\theta k'l'm} + \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{l'=|m|}^{\infty} \left[\frac{4\pi F_{kk'l}^{\theta r}}{2l'+1} - a_{ex}^2 G_{k'k}^0 \right] D_{l'l}^{(m)*} \tilde{m}^{rk'l'm} = \tilde{h}^{\theta klm},
\end{aligned} \tag{25}$$

где $a_{ex} = l_{ex}/R_0$, $a_{ex}^{(0)} = a_{ex} \ln(1/a_{ex})$, $a_{ex}^{(m)} = a_{ex}$ если $m \neq 0$, $\tilde{h}^{aklm}$ – компоненты разложения магнитного поля, определенные аналогично (24), а остальные не определенные выше параметры приводятся ниже. Именно, мы вводим следующие обозначения:

$$D_{ll'}^{(m)} = \int d\Omega\, \frac{\partial Y_l^{m*}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} Y_{l'}^m(\theta, \varphi) \,, \tag{26}$$

$$L_{ll'}^{(m)}(a_{ex}) = \begin{cases} \sqrt{2l+1}\sqrt{2l'+1}\left|P_l^0(a_{ex})P_{l'}^0(a_{ex})\right|, & m=0, \\ \sqrt{\dfrac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\dfrac{(2l'+1)(l'-m)!}{(l'+m)!}}\displaystyle\int_0^{1-a_{ex}} dx\,\frac{P_l^m(x)P_{l'}^m(x)}{1-x^2}, & m\neq 0, \end{cases} \tag{27}$$

где $P_l^m(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра,

$$G_{kk'}^0 = \frac{R_0^2}{V}\int_{R_1}^{R_2} dr\, f_k(r)f_{k'}(r), \tag{28}$$

$$G_{kk'}^r = \frac{R_0^2}{V}\left\{\int_{R_1}^{R_2} dr\,\frac{\partial}{\partial r}\left[rf_k(r)\right]\frac{\partial}{\partial r}\left[rf_{k'}(r)\right] - \left[R_2 f_k(R_2)f_{k'}(R_2) - R_1 f_k(R_1)f_{k'}(R_1)\right]\right\}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} F_{kk'l}^{rr} &= \frac{1}{V}\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr\, f_k(r)\frac{\partial}{\partial r}\int_{R_1}^{R_2} r'^2 dr'\,\tau_l'(r,r')f_{k'}(r'), \\ F_{kk'l}^{\theta r} &= \frac{1}{V}\int_{R_1}^{R_2} r dr\, f_k(r)\int_{R_1}^{R_2} r'^2 dr'\,\tau_l'(r,r')f_{k'}(r') = F_{k'kl}^{r\theta}, \\ F_{kk'l}^{\theta\theta} &= \frac{1}{V}\int_{R_1}^{R_2} r dr\, f_k(r)\int_{R_1}^{R_2} r' dr'\,\tau_l(r,r')f_{k'}(r'), \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\tau_l(r,r') = \begin{cases} \dfrac{r^l}{r'^{l+1}}, & r<r' \\ \dfrac{r'^l}{r^{l+1}}, & r>r' \end{cases}, \quad \tau_l'(r,r') = \frac{\partial\tau_l(r,r')}{\partial r'}. \tag{31}$$

При выводе уравнений (25) (в части, касающейся магнитостатической энергии) мы использовали следующее равенство:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\tau_l(r,r')}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta,\varphi)Y_l^{m*}(\theta',\varphi'). \tag{32}$$

Отметим, что наличие фактора $\ln(1/a_{ex})$ в определении $a_{ex}^{(0)}$, а также то обстоятельство, что мы ограничиваем интегрирование по x в формуле (27) (несмотря на то, что интеграл сходящийся) связано с наличием магнитных доменов на полюсах частицы, влиянием которых мы пренебрегаем. В формуле (25) члены, пропорциональные $F_{kk'l}^{ab}$, происходят от магнитостатической энергии частицы. Они играют роль размагничивающих факторов. Члены, пропорциональные a_{ex}^2 или $(a_{ex}^{(m)})^2$, возникают за счет обменной энергии. При относительно малых k и l эти члены малы по сравнению с "размагничивающим факторами", поскольку в рассматриваемом случае $a_{ex}\sim 10^{-2}$. Этот предел отличается от того, который рассматривался, например, в работах [12–14], где эти два вклада были сопоставимы. В то же время при больших k или l вклады от обменной энергии становятся большими (они пропорциональны k^2 и l^2 соответственно). Это гарантирует то, что уравнение (25) можно решать, ограничивая суммирование по k и l некоторыми конечными значениями, в том случае, если мы интересуемся не слишком высокими частотами.

Итак, мы получили систему линейных уравнений на компоненты намагниченности $\tilde{m}^{aklm}$, связывающую их с компонентами внешнего переменного магнитного поля $\tilde{h}^{aklm}$. Важным свойством этих уравнений является то, что они диагональны по азимутальному индексу m. Это непосредственно связано с геометрией рассматриваемой задачи. В произвольно направленном, но однородном внешнем поле[2] отличны от нуля только компоненты $\tilde{h}^{aklm}$ с $m=0$ и $m=\pm 1$. Соответственно, возбуждаться будут только компоненты намагниченности $\tilde{m}^{aklm}$ с этими же индексами m. Мы решаем систему (25) численно, ограничивая суммирование по k и l до некоторых значений $K_{\max}-1$ и $L_{\max}-1$ соответственно. Введем векторы $\tilde{m}_m$ и $\tilde{h}_m$, имеющие размерность $2K_{\max}L_{\max}$, в виде

$$\tilde{m}_m = \begin{pmatrix} \tilde{m}_m^r \\ \tilde{m}_m^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\tilde{m}^{rklm}\} \\ \{\tilde{m}^{\theta klm}\} \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_m = \begin{pmatrix} \tilde{h}_m^r \\ \tilde{h}_m^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\tilde{h}^{rklm}\} \\ \{\tilde{h}^{\theta klm}\} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

[2]На интересующих нас частотах порядка 1 – 10 ГГц длина волны падающего излучения много больше размера частицы. Так что магнитное поле можно считать однородным.

Тогда в частотном представлении уравнение (25) можно переписать в матричном виде как

$$\left[-\frac{i\omega}{\omega_s}\begin{pmatrix}\alpha & -1\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{\Lambda}^{rr}_m & (\hat{\Lambda}^{\theta r}_m)^T\\ \hat{\Lambda}^{\theta r}_m & \hat{\Lambda}^{\theta\theta}_m\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\tilde{m}^r_m\\ \tilde{m}^\theta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{h}^r_m\\ \tilde{h}^\theta_m\end{pmatrix}, \tag{34}$$

где элементы матриц $\hat{\Lambda}^{ab}_m$ очевидным образом определяются из уравнения (25). Нетрудно убедиться в том, что матрицы $\hat{\Lambda}^{ab}_m$ вещественны, при этом матрицы $\hat{\Lambda}^{aa}_m$ симметричны. Обозначим матрицу в квадратных скобках в уравнении (34) как $\hat{\tilde{\chi}}^{-1}_m(\omega)$. Обратные матрицы с $m=0,\pm1$, элементы которых мы обозначим как $\tilde{\chi}^{aklm}_{bk'l'm}(\omega)$, определяют восприимчивость частицы в выбранном представлении. В следующем разделе мы выведем соответствующее выражение для восприимчивости частицы в декартовой системе координат, а также выражение для магнитной проницаемости композита как функцию $\tilde{\chi}^{aklm}_{bk'l'm}(\omega)$.

3. Магнитная проницаемость композита

В декартовых координатах и частотном представлении связь между намагниченностью частицы и внешнем полем определяется как

$$m^\alpha(\mathbf{r};\omega)=\frac{1}{V}\int\limits_V d^3\mathbf{r}'\,\chi^\alpha_\beta(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)h^\beta(\mathbf{r}';\omega)\,, \tag{35}$$

где $\chi^\alpha_\beta(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)$ – тензор восприимчивости частицы в декартовых координатах. Он связан с таковым в сферических координатах посредством равенства

$$\chi^\alpha_\beta(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^a}\chi^a_b(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)\frac{\partial x'^b}{\partial x'^\beta}\,. \tag{36}$$

В однородном поле средняя намагниченность частицы равна

$$m^\alpha(\omega)=\frac{1}{V^2}\int\limits_V d^3\mathbf{r}\int\limits_V d^3\mathbf{r}'\,\chi^\alpha_\beta(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)\,h^\beta(\omega)\equiv\chi^\alpha_\beta(\omega)h^\beta(\omega)\,. \tag{37}$$

Будем считать, что направления осей частиц, вдоль которых расположены магнитные домены (локальные оси z), распределены в композите случайно. Тогда для восприимчивости композита получим формулу

$$\chi(\omega)=\frac{p_F}{3}\chi^\alpha_\alpha(\omega)=\frac{p_F}{3V^2}\int\limits_V d^3\mathbf{r}\int\limits_V d^3\mathbf{r}'\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^a}\chi^a_b(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)\frac{\partial x'^b}{\partial x'^\alpha}\,, \tag{38}$$

где p_F – объемная доля ферромагнетика. Она связана с объемной долей частиц в композите, p_c, посредством формулы

$$p_F=p_c\left[1-\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^3\right],\quad \delta=\frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}=\frac{2d}{R_0}. \tag{39}$$

В пределе $\delta\ll1$ имеем $p_c\cong 6p_F\delta$. Отметим, что формула (38) получена нами в пренебрежении взаимодействием частиц друг с другом. Как было показано нами выше, частицы в рассматриваемой равновесной конфигурации не создают магнитного поля (если пренебречь магнитными доменами). Поэтому можно ожидать, что приближение невзаимодействующих частиц является адекватным даже для достаточно плотной упаковки. Тензор восприимчивости частицы в сферических координатах, $\chi^a_b(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)$, связан с полученными нами выше матрицами $\tilde{\chi}^{aklm}_{bk'l'm}(\omega)$ посредством равенства

$$\chi^a_b(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)=\frac{1}{\varkappa^a(r)}\left[\sum_{m=-1}^{1}\sum_{kk'=0}^{\infty}\sum_{ll'=|m|}^{\infty}f_k(r)Y^m_l(\theta,\varphi)\tilde{\chi}^{aklm}_{bk'l'm}(\omega)f_{k'}(r')Y^m_{l'}(\theta',\varphi')^*\right]\varkappa^b(r')\,. \tag{40}$$

Подставляя это выражение в уравнение (38) и проводя интегрирование по координатам, получаем для магнитной проницаемости композита, $\mu(\omega)=1+4\pi\chi(\omega)$, формулу

$$\mu(\omega)\;=\;1+\frac{4\pi p_F}{9}\sum_{m=-1}^{1}\left[\tilde{\chi}^{r01m}_{r01m}(\omega)+\sum_{l=|m|}^{\infty}\left(\tilde{\chi}^{r01m}_{\theta0lm}(\omega)+\tilde{\chi}^{\theta0lm}_{r01m}(\omega)\right)D^{(m)}_{1l}+\sum_{l=|m|}^{\infty}\sum_{l'=|m|}^{\infty}\tilde{\chi}^{\theta0lm}_{\theta0l'm}(\omega)D^{(m)}_{1l}D^{(m)}_{1l'}\right], \tag{41}$$

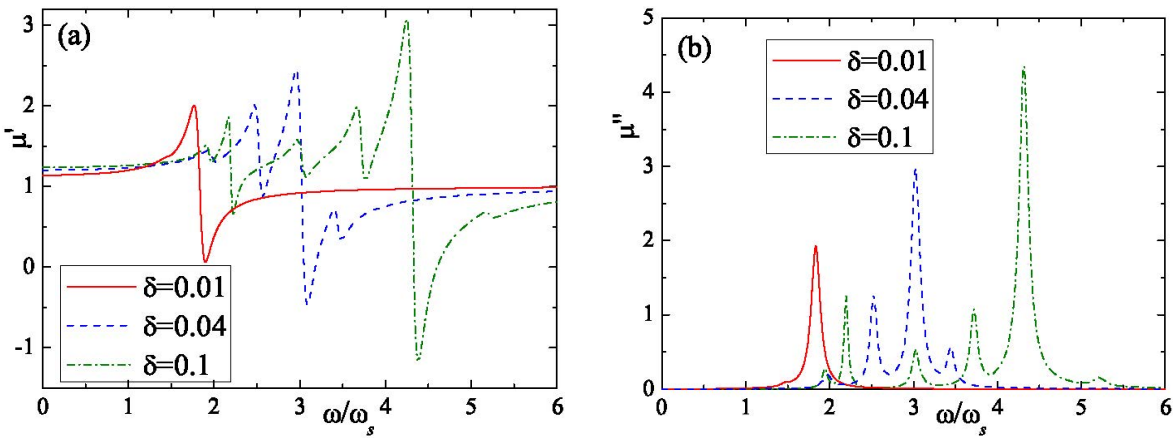

Рисунок 2 – Частотные зависимости реальной (a) и мнимой (b) части магнитной проницаемости композита, рассчитанные при трех значениях толщины ферромагнитного слоя d. Параметры модели: $\beta = 0.1$, $a_{ex} = 0.01$, $p_c = 0.15$, $\alpha = 0.01$

где $D^{(m)}_{1l'}$ дается формулой (26). При выводе формулы (41) мы приняли во внимание, что для выбранного набора функций $f_k(r)$ мы имеем (см. Приложение) $f_0(r) = 1/\sqrt{4\pi} = \text{const}$, при этом

$$\frac{1}{V}\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 dr\, f_k(r) = 0\,, \quad k > 0\,, \tag{42}$$

в силу ортогональности радиальных функций.

В данной работе мы рассматриваем частицы с малой толщиной ферромагнитной области, когда $\delta \ll 1$. В этом случае мы можем ограничиться рассмотрением лишь одной однородной радиальной моды $f_0(r) = 1/\sqrt{4\pi}$. Математически это обусловлено тем, что при $\delta \ll 1$ имеют место приближенные равенства

$$G^0_{kk'} \approx \delta_{kk'} G^0_k\,, \quad G^r_{kk'} \approx \delta_{kk'} G^r_k\,, \quad F^{ab}_{kk'l} \approx \delta_{kk'} F^{ab}_{kl}\,. \tag{43}$$

В силу этого уравнение (25) приближенно диагонально по индексам k и k'. Поскольку в восприимчивость композита, формула (41), входят только компоненты $\tilde{\chi}^{a0lm}_{b0l'm}$, то это и обуславливает возможность рассмотрения одной радиальной моды в пределе $\delta \ll 1$.

На рисунке 2 представлены частотные зависимости магнитной проницаемости композита, рассчитанные при трех значениях толщины ферромагнитного слоя в частицах (в этих и всех остальных расчетах мы берем $L_{max} = 151$). Мнимая часть магнитной проницаемости характеризуется одним основным пиком и несколькими побочными пиками, которые располагаются как при более низких, так и более высоких частотах. Основной пик сдвигается вправо при увеличении $\delta = 2d/R_0$. Это связано со следующим обстоятельством. Параметры F^{ab}_{00l} можно рассчитать аналитически. Мы не будем приводить здесь соответствующих формул в силу их громоздкости, а ограничимся лишь асимптотиками при $\delta \to 0$ и $l \to \infty$. Мы имеем

$$F^{rr}_{00l} \to \begin{cases} 2l+1, & \delta \to 0 \\ 1/\delta, & l \to \infty \end{cases}, \quad F^{r\theta}_{00l} \to \begin{cases} -\delta, & \delta \to 0 \\ -1/l, & l \to \infty \end{cases}, \quad F^{\theta\theta}_{00l} \to \begin{cases} 2\delta, & \delta \to 0 \\ 2/l, & l \to \infty \end{cases}. \tag{44}$$

Отметим, что асимптотики при $\delta \to 0$ справедливы лишь в случае $l\delta \ll 1$. Мы видим, что параметры $F^{r\theta}_{00l}$ и $F^{\theta\theta}_{00l}$ растут по абсолютной величине с ростом δ, что и приводит к сдвигу резонансной частоты вправо. Амплитуда основного пика растет с ростом δ. Это связано с тем, что с ростом δ увеличивается доля ферромагнитной фазы в композите. Оценим характерные значения основных резонансных частот для кривых, представленных на рисунке 2. Полагая $M_s = 1700$ Гс (как для железа), будем иметь $\omega_s/2\pi \cong 4.75$ ГГц. Таким образом, резонансные частоты располагаются примерно в диапазоне 8 – 20 ГГц. Это достаточно хорошо (хоть в целом и несколько выше) соответствует экспериментальным данным, полученным в работах [4–6]. Отметим также, что, согласно предварительным расчетам, учет высших радиальных мод несколько сдвигает резонансные частоты влево.

Проанализируем теперь, как происходят колебания намагниченности частицы в магнитном поле на основной резонансной частоте. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда магнитное поле направлено по оси z, т.е. перпендикулярно $\mathbf{M}_0(\mathbf{r})$ (вне доменов). Используя выражение (35), а также формулу (40) для восприимчивости частицы, получим формулу для колебания намагниченности

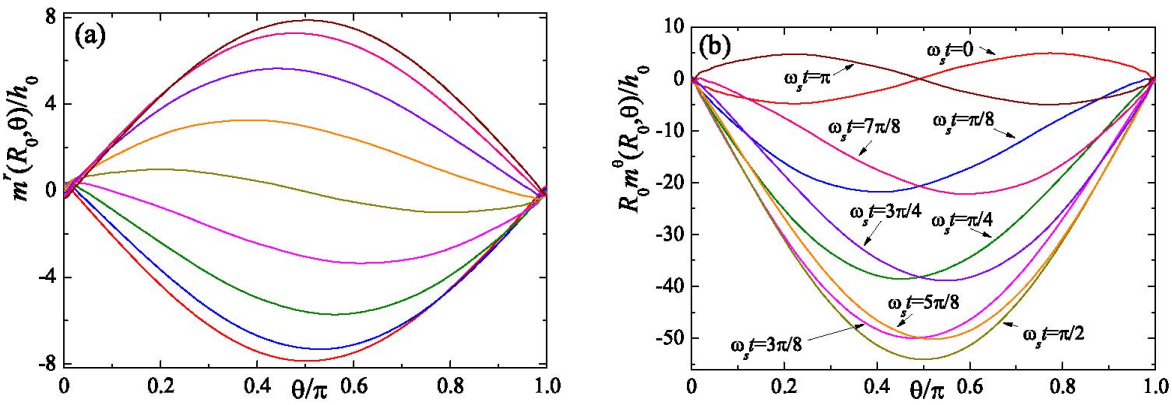

Рисунок 3 – Зависимости радиальной (a) и полярной (b) компонент намагниченности от полярного угла θ, рассчитанные в различные моменты времени в интервале $0 \le \omega t \le \pi$. Частота колебаний соответствует основной резонансной частоте. Для панели (a) времена равны $\omega t = 0$, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$, $\pi/2$, $5\pi/8$, $3\pi/4$, $7\pi/8$ и π для кривых снизу вверх соответственно. Параметры модели: $\delta = 0.04$, $\beta = 0.1$, $a_{ex} = 0.01$, $\alpha = 0.01$.

частицы в поле $\mathbf{h} = \mathbf{e}_z h_0 e^{-i\omega t}$ в виде

$$\tilde{m}^a(\mathbf{r},\, t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} f_k(r)\sqrt{\frac{2l+1}{3}}P_l(\cos\theta)\left[\tilde{\chi}^{akl0}_{r010} + \sum_{l'=0}^{\infty}\tilde{\chi}^{akl0}_{\theta 0 l' 0}D^{(0)}_{1l'}\right]e^{-i\omega t}\right\}h_0\,. \tag{45}$$

Мы видим, что функция $\tilde{m}^a(\mathbf{r},\, t)$ не зависит от азимутального угла φ. Если мы учтем лишь одну радиальную моду, то эта функция не будет зависеть также и от r, т.е. колебания будут однородны по толщине частицы. На рисунке 3 представлены зависимости $\tilde{m}^r(\theta,\, t)$ и $\tilde{m}^\theta(\theta,\, t)$ от полярного угла θ, рассчитанные в различные моменты времени на полупериоде $0 \le \omega t \le \pi$ на частоте, соответствующей основному резонансу. Мы видим, что максимальная амплитуда колебаний приходится на экваториальную область, в то время как на полюсах намагниченность практически не возбуждается. Профили компонент намагниченности $\tilde{m}^r(\theta,\, t)$ и $\tilde{m}^\theta(\theta,\, t)$ оказываются сдвинуты по фазе на $\pi/2$ относительно друг друга, что соответствует вращению локальной намагниченности вокруг оси, лежащей в плоскости xy и касательной к поверхности частицы. Отметим также, что амплитуда колебаний полярной компоненты намагниченности $\tilde{m}^\theta(\theta,\, t)$ много больше таковой для радиальной компоненты $\tilde{m}^r(\theta,\, t)$.

Помимо основного резонанса, на рисунке 2 мы видим ряд побочных пиков, большинство из которых располагается на частотах ниже основного резонанса. Мы не будем здесь приводить профилей намагниченности в поле с частотой, соответствующей какому-либо из этих резонансов. Это связано с тем, что в поле, параллельном оси z частицы, возбуждаются только колебания с $m = 0$, см. формулу (45). В то же время, как будет показано ниже в разделе 5, все побочные пики, видимые на рисунке 2, соответствуют собственным колебаниям с $m = 1$. Таким образом, эти колебания не возбуждаются в поле, параллельном оси z частицы. Поскольку в композите локальные оси z частиц распределены случайно, то такие колебания будут возбуждаться у частиц, для которых локальная ось z лежит под углом к приложенному полю, что и приводит к появлению побочных резонансов магнитной проницаемости композита.

4. Магнитная проницаемость композита в пределе $d \to 0$ и $l_{ex}/R_0 \to 0$

В данном разделе мы выведем аналитическую формулу для магнитной проницаемости композита в пределах $d \to 0$ и $a_{ex} = l_{ex}/R_0 \to 0$. В пределе $a_{ex} \to 0$ мы можем пренебречь вкладами в уравнение Ландау-Лифшица (25) от энергии обменного взаимодействия. Далее, согласно формуле (44), мы имеем $F^{r\theta}_{00l} \to 0$, $F^{\theta\theta}_{00l} \to 0$ и $F^{rr}_{00l} \to 2l+1$ при $\delta \to 0$. Пренебрегая вкладами от $F^{r\theta}_{00l}$ и $F^{\theta\theta}_{00l}$, мы получим, что уравнения (25) становятся диагональными по индексу l (напомним также, что мы рассматриваем здесь лишь одну радиальную моду). Такое уравнение можно решить аналитически. Подставляя затем найденные выражения для $\tilde{\chi}^{a0lm}_{b0lm}$ в формулу (41), получаем выражение для магнитной проницаемости композита в виде

$$\mu(\omega) = 1 + \frac{p_F}{3}(4\pi\omega_s)^2\frac{[A(1+\beta/4\pi)+\beta/4\pi] - i\alpha\omega(1+A)/(4\pi\omega_s)}{\omega_r^2 - (1+\alpha^2)\omega^2 - 2i\alpha\omega\omega_s(2\pi+\beta)}, \tag{46}$$

где

$$\omega_r = \omega_s\sqrt{\beta(4\pi+\beta)} \tag{47}$$

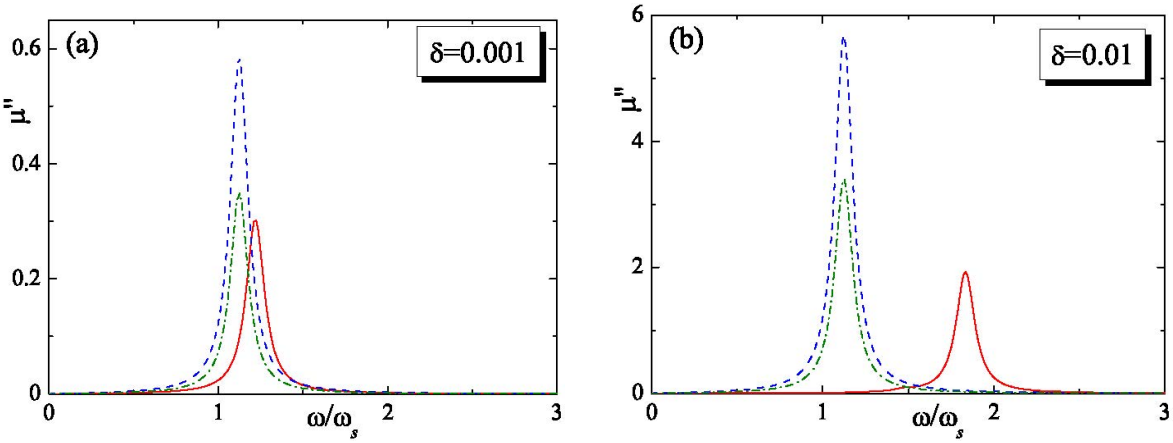

Рисунок 4 – Частотные зависимости мнимой части магнитной проницаемости, рассчитанные при $\delta = 0.001$ (a) и при $\delta = 0.01$ (b). Сплошные кривые соответствуют численному расчету, формула (41). Пунктирные кривые соответствуют асимптотической формуле (46) с параметром A, рассчитанным по формуле (48). Штрих-пунктирные кривые рассчитаны по асимптотической формуле (46) с параметром $A = A(L_0 = 10) \cong 1.05$ (см. текст). Параметры модели: $\beta = 0.1$, $a_{ex} = 0.01$, $p_c = 0.15$, $\alpha = 0.01$

есть резонансная частота, а

$$A = \frac{1}{3}\left(\sum_{l=0}^{\infty} D_{1l}^{(0)}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\sum_{l=0}^{\infty} D_{1l}^{(1)}\right)^2 . \tag{48}$$

Проводя численное суммирование в формуле (48), получаем $A \cong 1.76$. Отметим, что в рассматриваемом пределе резонансная частота композита (47) совпадает с резонансной частотой тонкой пленки, обладающей одноосной магнитной анизотропией. Кроме того, выражение (46) для магнитной проницаемости сходно с таковым для тонкой пленки (после усреднения по направлению поля) с той лишь разницей, что для тонкой пленки $A \equiv 1$.

На рисунке 4 представлены частотные зависимости мнимой части магнитной проницаемости композита, вычисленные по асимптотической формуле (46) при $\delta = 0.001$ [панель (a)] и $\delta = 0.01$ [панель (b)]. Для сравнения на этом же рисунке показаны результаты численного решения уравнения Ландау-Лифшица. Мы видим, что при $\delta = 0.001$ резонансная частота достаточно хорошо описывается формулой (47), в то время как для $\delta = 0.01$ расхождение уже становится достаточно значительным. Это связано с тем, что при $\delta = 0.01$ мы уже не можем пренебречь $4\pi F_{00l}^{\theta\theta} \approx 4\pi\delta$ по сравнению с β [для кривых на рисунке (4) мы имеем $\beta = 0.1$]. Отметим также, что формула (46) переоценивает амплитуду резонансного пика. Это объясняется следующим образом. В формуле (48) суммирование по l производится от нуля до бесконечности. В то же время мы можем пренебрегать вкладами от $F_{00l}^{r\theta}$ и $F_{00l}^{\theta\theta}$, для которых $l\delta \ll 1$. Кроме того, при выводе формулы (46) мы пренебрегали вкладами от обменной энергии, что можно делать, когда $la_{ex} \ll 1$. При обоих значениях δ указанные выше неравенства перестают соблюдаться при $l \gtrsim 10$ (при $l \gtrsim 10$ перестает соблюдаться неравенство $la_{ex} \ll 1$, когда $a_{ex} = 0.01$). Ограничивая в формуле (48) суммирование до $l = L_0 = 10$, получим $A(L_0 = 10) \cong 1.05$. Соответствующие кривые мнимой части магнитной проницаемости показаны на рисунке (4) штрих-пунктирными кривыми. Мы видим, что при $\delta = 0.001$ соответствующая кривая достаточно хорошо совпадает с численным расчетом (тем не менее существует некоторое расхождение в резонансных частотах).

5. Устойчивость магнитной конфигурации. Собственные колебания намагниченности

В данном разделе мы будем исследовать собственные колебания намагниченности и покажем, что изображенная на рисунке 1 магнитная конфигурация соответствует локальному минимуму энергии. Для того чтобы получить уравнения на собственные колебания, надо положить в матричном уравнении Ландау-Лифшица (34) $\alpha = 0$ и $\tilde{h}_m^a = 0$. В результате уравнение (34) можно переписать в виде

$$\omega^2 \begin{pmatrix} \tilde{m}_m^r \\ \tilde{m}_m^\theta \end{pmatrix} + \hat{\Omega}_m^2 \begin{pmatrix} \tilde{m}_m^r \\ \tilde{m}_m^\theta \end{pmatrix} = 0\,, \quad \hat{\Omega}_m^2 = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda}_m^{\theta\theta}\hat{\Lambda}_m^{rr} - \left(\hat{\Lambda}_m^{\theta r}\right)^2 & \hat{\Lambda}_m^{\theta\theta}\left(\hat{\Lambda}_m^{\theta r}\right)^T - \hat{\Lambda}_m^{\theta r}\hat{\Lambda}_m^{\theta\theta} \\ \hat{\Lambda}_m^{rr}\hat{\Lambda}_m^{\theta r} - \left(\hat{\Lambda}_m^{\theta r}\right)^T\hat{\Lambda}_m^{rr} & \hat{\Lambda}_m^{rr}\hat{\Lambda}_m^{\theta\theta} - \left[\left(\hat{\Lambda}_m^{\theta r}\right)^T\right]^2 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

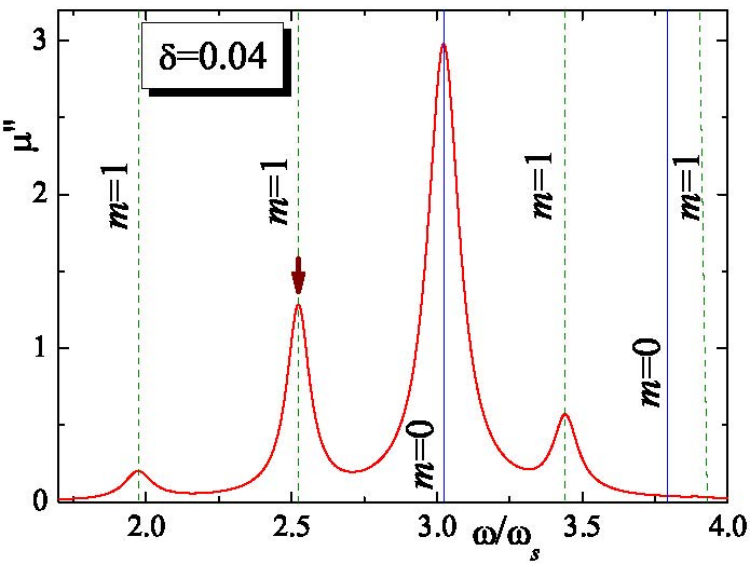

Рисунок 5 – Частотная зависимость мнимой части магнитной проницаемости, рассчитанная при $\delta = 0.04$. Остальные параметры модели: $\beta = 0.1$, $a_{ex} = 0.01$, $p_c = 0.15$, $\alpha = 0.01$. Вертикальными линиями отмечены собственные частоты матриц $\hat{\Omega}_0$ (сплошные линии) и $\hat{\Omega}_1$ (пунктирные линии).

Данное уравнение есть уравнение на собственные значения матрицы $\hat{\Omega}_m^2$. Нас интересуют только матрицы с $m = 0$ и $m = \pm 1$, поскольку только колебания с такими m возбуждаются в однородном магнитном поле. Можно также показать, что матрицы с $m = +1$ и $m = -1$ идентичны. Поэтому мы будем исследовать только матрицы $\hat{\Omega}_0^2$ и $\hat{\Omega}_1^2$. Анализ показывает, что при всех значениях параметров модели, рассмотренных в данной работе, собственные значения данных матриц, ω_{mS}^2 ($S = 0, 1, \ldots, 2K_{\max}L_{\max}$), оказываются вещественными и положительными. Из этого вытекает, что рассматриваемая здесь равновесная магнитная конфигурация действительно соответствует локальному минимуму энергии. Кроме того, оказывается, что все собственные значения матриц $\hat{\Omega}_m^2$ являются двукратно вырожденными. На рисунке 5 показана частотная зависимость мнимой части магнитной проницаемости, рассчитанная при $\delta = 0.04$ в интервале частот $1.7 < \omega/\omega_s < 4$, в котором наблюдаются основные резонансы. Вертикальными линиями на этом рисунке показаны все собственные частоты матриц $\hat{\Omega}_0$ и $\hat{\Omega}_1$, которые попали в данный интервал частот. Мы видим, что основному резонансу соответствует некоторая собственная частота матрицы $\hat{\Omega}_0$, в то время как всем побочным резонансам соответствуют собственные частоты матрицы $\hat{\Omega}_1$. Интересно отметить также, что существуют некоторые собственные частоты, которые не соответствуют никаким пикам в мнимой части магнитной проницаемости. Это можно объяснить наличием правила отбора, запрещающего возбуждения некоторых собственных колебаний в однородном поле. Эти правила отбора, по-видимому, контролируются параметрами $D_{1l}^{(m)}$ [см. формулу (41)], для которых справедливо равенство $D_{1l}^{(m)} = 0$ при $\mod(l, 2) = 1$ в силу симметрии сферических гармоник.

Рассмотрим теперь, как выглядят собственные колебания намагниченности, соответствующие некоторым резонансным частотам, в реальном пространстве. Если $\tilde{m}_S^{aklm}$ есть некоторая собственная функция матрицы $\hat{\Omega}_m^2$, то колебания намагниченности, соответствующие данной моде, вычисляются по формуле

$$\tilde{m}_{Sm}^a(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} \tilde{m}_S^{aklm} f_k(r) Y_l^m(\theta, \varphi)\,. \tag{50}$$

Если учитывать только первую радиальную моду, то функции $\tilde{m}_{Sm}^a(\mathbf{r})$ не будут зависеть от r. Далее, для $m = 0$ эти функции не будут зависеть также и от φ, а для $m = \pm 1$ эта зависимость сводится к $e^{\pm i\varphi}$. Поскольку все собственные частоты оказываются двукратно вырожденными, то каждой собственной частоте будут соответствовать две собственные функции $\tilde{m}_S^{aklm}$. Расчеты показывают, что все собственные функции $\tilde{m}_S^{aklm}$ являются вещественными. На рисунках 6(a, b) представлены зависимости $\tilde{m}_{S0}^r(\mathbf{r})$ и $\tilde{m}_{S0}^\theta(\mathbf{r})$ от полярного угла θ для собственных функций матрицы $\hat{\Omega}_0^2$, соответствующих основной резонансной частоте. Мы видим, что на полюсах колебания практически не возбуждаются. При этом профили $\tilde{m}_{S0}^a(R_0, \theta, 0)$ во многом схожи с таковыми для колебаний намагниченности в поле, параллельном оси z частицы на временах $\omega t = 0$ и $\omega t = \pi/2$ (см. рисунок 3). Совсем иную картину мы наблюдаем для собственных колебаний, соответствующих матрице $\hat{\Omega}_1^2$. На рисунках 6(c, d) представлены зависимости $\tilde{m}_{S1}^a(R_0, \theta, 0)$ от угла θ для собственных функций, соответствующих резонансной частоте, указанной стрелкой на рисунке 5. Мы видим, что колебания происходят в основном вблизи полюсов,

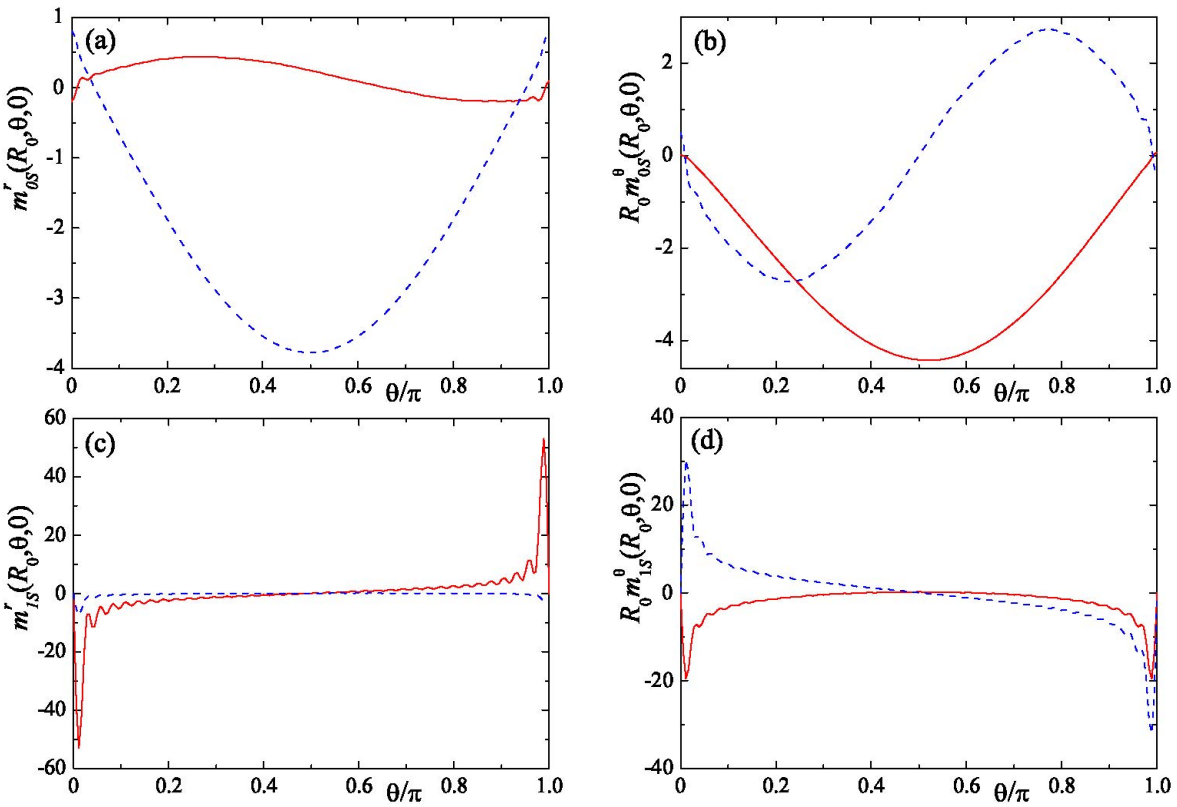

Рисунок 6 – Зависимости радиальных (a, c) и полярных (b, d) компонент собственных колебаний намагниченности от полярного угла θ, соответствующие основному резонансу (панели a и b) и резонансу, указанному стрелкой на рисунке 5 (панели c и d). Параметры модели: $\delta = 0.04$, $\beta = 0.1$, $a_{ex} = 0.01$.

где располагаются магнитные домены, влиянием которых мы пренебрегаем. Учет наличия магнитных доменов некоторым образом должен повлиять на полученные результаты в части, касающейся побочных резонансов.

6. Обсуждение

Итак, мы рассмотрели отклик композита, состоящего из полых сферических ферромагнитных частиц на переменное магнитное поле. Мы проанализировали поведение магнитной проницаемости в зависимости от отношения $\delta = 2d/R_0$. Мы показали, что резонансные частоты сдвигаются вправо при увеличении δ. Такое поведение представляется естественным и находит свою аналогию с поведением резонансных частот в пленке. Действительно, для пленки с продольнымы размерами L и толщиной d компоненты тензора размагничивания вдоль пленки, $N_{x,y}$, увеличиваются с ростом отношения d/L: $N_{x,y} \propto d/L \ln(L/d)$. В рассматриваемом случае роль размагничивающих факторов $N_{x,y}$ играют параметры $F^{r\theta}_{00l}$ и $F^{\theta\theta}_{00l}$, которые линейно растут с δ при $l\delta \ll 1$. Это и приводит к сдвигу резонансной частоты вправо. В пределе $\delta \to 0$ мы получили аналитическое выражение для магнитной проницаемости композита и показали, что оно во многом схоже с таковым для тонкой пленки.

Основным предположением данной работы является вихревая структура равновесной намагниченности, схематически изображенная на рисунке 1. Для этой структуры характерно наличие двух магнитных доменов, располагающихся на полюсах частицы, влиянием которых мы пренебрегаем. В то же время мы показали, что побочные резонансы магнитной проницаемости композита отвечают собственным колебаниям намагниченности вблизи полюсов. Поэтому вопрос о том, являются ли данные побочные резонансы артефактом рассматриваемого приближения или они действительно характерны для рассматриваемой равновесной магнитной конфигурации, требует отдельного рассмотрения. В частности, возможно проведение микромагнитного расчета равновесной конфигурации и последующего решения уравнений Ландау-Лифшица, линеаризованного вокруг найденного распределения намагниченности.

Еще одним существенным предположением данной работы является специальный вид одноосной магнитной анизотропии: ось анизотропии не фиксирована, а вращается в пространстве вместе с намагниченностью. Строго говоря, это и приводит к тому, что рассматриваемая магнитная конфигурация соответствует некоторому экстремуму энергии (локальному минимуму, как показано в разделе 5). Если

предполагать, что частица имеет некоторую фиксированную ось анизотропии, то это в общем случае приведет к изменению ее магнитной конфигурации, что может существенно усложнить расчеты. Действительно, в этом случае можно ожидать появления зависимости линеаризованной намагниченности от азимутального угла φ. В то же время, в случае слабой магнитной анизотропии, $\beta \ll 1$, данные эффекты можно предполагать незначительными.

Как отмечалось во Введении, в данной работе мы полностью пренебрегали скин-эффектом, предполагая, что толщина d ферромагнитного слоя частицы много меньше толщины скин-слоя l_s. Оценим здесь постфактум характерные толщины d, для которых это можно делать. Толщину скин-слоя можно оценить по формуле [7]

$$l_s = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu_{st}}}\,,$$

где c – скорость света, а σ и μ_{st} – проводимость и статическая магнитная проницаемость частицы соответственно. Оценим l_s на частоте, соответствующей основному резонансу для композита с $\delta = 0.04$, $\omega \cong 3\omega_s$ (см. рисунок 2). Полагая $M_s = 1700\,\text{Гс}$, $\sigma = 9 \times 10^{16}\,\text{сек}^{-1}$ (как для железа), получим $l_s \approx 1.3/\sqrt{\mu_{st}}$ мкм. Статическую магнитную проницаемость частицы можно оценить из полученных выше результатов по формуле $\mu_{st} = 1 + (\mu(0) - 1)/p_F$, где $\mu(0)$ – магнитная проницаемость композита на нулевой частоте. Так, для $\delta = 0.04$ получаем $\mu_{st} \approx 7.25$. Отсюда находим окончательно $l_s \approx 0.5$ мкм. Поскольку, как мы упоминали во Введении, мы рассматриваем частицы с характерными размерами порядка 0.5–1 мкм, а также $d/R_0 \ll 1$, то мы имеем $d \ll l_s$. Следовательно, в рассматриваемом случае скин-эффектом действительно можно пренебречь.

В заключение отметим, что полученные здесь результаты можно уточнить, принимая во внимание высшие радиальные моды, которыми мы пренебрегаем в данной работе. Это, в частности, поможет выйти за предел малых δ и позволит рассматривать толщины ферромагнитного слоя, сравнимые с размерами частиц.

7. Благодарности

Автор благодарен МСЦ НИЦ "Курчатовский институт" за предоставленные вычислительные ресурсы. Автор также благодарен А.Н. Лагарькову, К.Н. Розанову, А.Л. Рахманову и Н.А. Бузникову за полезные обсуждения.

Приложение. Построение ортогональных радиальных функций

В данном Приложении мы опишем алгоритм построения радиальных функций, ортогональных с весом r^2 и удовлетворяющих граничным условиям (23). Для этого сначала представим их в виде

$$f_k(r) = \sqrt{\frac{V}{d}}\,\frac{g_k(x(r))}{r}\,,\quad x(r) = \frac{r - R_1}{d}\,,\quad 0 \le x \le 1\,. \tag{51}$$

Функции $g_k(x)$ должны быть ортогональны с весом 1,

$$\int\limits_0^1 dx\, g_k(x) g_{k'}(x) = \delta_{kk'}\,, \tag{52}$$

а также удовлетворять граничным условиям

$$\begin{cases} g_k'(0) - \dfrac{2\delta}{1-\delta} g_k(0) = 0 \\ g_k'(1) - \dfrac{2\delta}{1+\delta} g_k(1) = 0 \end{cases}\,, \tag{53}$$

следующим из условий (23). Функции $g_k(x)$ могут быть построены различными способами. Мы выберем здесь следующий. Рассмотрим тригонометрические функции вида

$$y_k(x) = A_k \sin(\mu_k x) + B_k \cos(\mu_k x)\,. \tag{54}$$

Потребуем для них соблюдения граничных условий (53). Тогда получим

$$y_k(x) = C_k \left[\frac{2\delta}{(1-\delta)\mu_k} \sin(\mu_k x) + \cos(\mu_k x)\right]\,, \tag{55}$$

при этом коэффициенты C_k находятся из условий нормировки, а μ_k должны удовлетворять уравнению

$$\operatorname{tg}\mu_k \left(\mu_k + \frac{4\delta^2}{(1-\delta^2)\mu_k}\right) = \frac{4\delta^2}{1-\delta^2}\,. \tag{56}$$

Отметим здесь, что если μ_k есть корень уравнения (56), то и $-\mu_k$ будет корнем того же уравнения с той же самой функцией $y_k(x)$. Следовательно, мы можем рассматривать только неотрицательные корни уравнения (56). Существует бесконечное число неотрицательных корней уравнения (56), которые мы упорядочим по возрастанию индекса k: $\mu_0 < \mu_1 < \dots$.

Далее, мы не можем отождествить функции $y_k(x)$ с искомыми функциями $g_k(x)$, поскольку функции $y_k(x)$ не ортогональны. Мы будем использовать следующую процедуру ортогонализации. Положим $g_0(x) = y_0(x)$, а все последующие $g_k(x)$ будем строить по рекуррентной формуле

$$g_k(x) = b_k \left[y_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \left(\int_0^1 dx'\, g_j(x') y_k(x') \times g_j(x) \right) \right], \tag{57}$$

где коэффициенты b_k находятся из условия нормировки. Нетрудно убедится в том, что построенные таким образом функции $g_k(x)$ будут ортонормированы.

Наконец отметим, что наименьший неотрицательный корень уравнения (56) есть $\mu_0 = 0$. Соответствующая функция $g_0(x) = y_0(x)$ получается предельным переходом $\mu_0 \to 0$ в формуле (55). В результате получим

$$y_0(x) = C_0 \left[\frac{2x\delta}{1-\delta} + 1 \right]. \tag{58}$$

Нетрудно убедиться в том, что для нее $f_0(r) = \text{const}$, или с учетом нормировки $f_0(r) = 1/\sqrt{4\pi}$.

Список литературы

[1] Li Z., Yang Z. Microwave absorption properties and mechanism for hollow Fe_3O_4 nanosphere composites // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2015. Vol. 387. P. 131–138.

[2] Magnetite hollow microspheres with a broad absorption bandwidth of 11.9 GHz: toward promising lightweight electromagnetic microwave absorption / Ivan Shanenkov, Alexander Sivkov, Alexander Ivashutenko et al. // Phys. Chem. Chem. Phys. 2017. Vol. 19. P. 19975–19983.

[3] Synthesis of hollow Fe_3O_4 particles via one-step solvothermal approach for microwave absorption materials: effect of reactant concentration, reaction temperature and reaction time / Mingxu Sui, Xiaodong Sun, Hongfei Lou et al. // Journal of Materials Science: Materials in Electronics. 2018. May. Vol. 29, no. 9. P. 7539–7550.

[4] Low weight hollow microspheres of iron with thin dielectric coating: Synthesis and microwave permeability / Anastasia Kosevich, Elizaveta Petrusevich, Sergey Maklakov et al. // Coatings. 2020. Vol. 10, no. 10.

[5] The size dependence of microwave permeability of hollow iron particles / Anastasia V. Artemova, Sergey S. Maklakov, Alexey V. Osipov et al. // Sensors. 2022. Vol. 22, no. 8.

[6] Influence of hydrogen reduction stage conditions on the microwave properties of fine iron powders obtained via a spray-pyrolysis technique / Anastasia V. Artemova, Sergey S. Maklakov, Artem O. Shiryaev et al. // Magnetism. 2023. Vol. 3, no. 2. P. 90–101.

[7] Ландау Л.Д., Лифшиц Л.М. Электродинамика сплошных сред. Наука, 1992.

[8] Сбойчаков А.О. О магнитной энергии ферромагнитной частицы с полостью // Современная электродинамика. 2023. Vol. 5 (7). P. 15.

[9] McKeever C., Ogrin F. Y., Aziz M. M. Microwave magnetization dynamics in ferromagnetic spherical nanoshells // Phys. Rev. B. 2019. Aug. Vol. 100. P. 054425.

[10] Ландау Л.Д., Лифшиц Л.М. Теория поля, 6 изд. М.: Наука, 1973. Vol. 2.

[11] Brown William Fuller J. Micromagnetics, Domains, and Resonance // Journal of Applied Physics. 1959. 04. Vol. 30, no. 4. P. S62–S69.

[12] Aharoni A. Exchange resonance modes in a ferromagnetic sphere // Journal of Applied Physics. 1991. 06. Vol. 69, no. 11. P. 7762–7764.

[13] Aharoni A. Effect of surface anisotropy on the exchange resonance modes // Journal of applied physics. 1997. Vol. 81, no. 2. P. 830–833.

[14] Size dependence of microwave permeability of spherical ferromagnetic particles / G Viau, F Fiévet-Vincent, F Fiévet et al. // Journal of applied physics. 1997. Vol. 81, no. 6. P. 2749–2754.

High frequency permeability of the system of hollow ferromagnetic particles

A.O. Sboychakov[1*]
[1] Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia
[*] sboycha@mail.ru

Abstract

The paper studies high-frequency permeability of the composite materials consisting of hollow ferromagnetic particles embedded into the non-magnetic media. It is assumed that the ferromagnetic particles have spherical shape, and the thickness of the ferromagnetic region d is much smaller than the particles' diameters D. It was shown recently [Modern Electrodynamics, 5 (7), p. 15 (2023)], that under certain conditions, the magnetization distribution in such a particles is non-uniform, but form a vortex-like structure: the magnetization is twisted in some plain outside two domains placed at the poles of the particle. The high-frequency permeability of such a composite material has been studied at $d/D \ll 1$ and in the limit of non-interacting particles. It was shown, in particular, that the frequency dependence of the particle's susceptibility is quite similar to that for the thin film. At the same time, the magnetization oscillations in the ac field are non-homogeneous.

Key words: magnetic composites, magnetic permeability