

# Вынужденное излучение как пороговое явление

А.П. Виноградов<sup>1,2</sup>, Е.С. Андрианов<sup>1,2</sup>, А.А. Пухов \* <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова», Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 11.12.2024

Одобрена после рецензирования 18.12.2024

Принята к публикации 26.12.2024

## Аннотация

Показано, что вынужденное излучение по существу является тем же спонтанным излучением, но излучение фотона происходит не в пустую моду, а в моду, содержащую фотоны. По количеству фотонов в этой моде явление носит пороговый характер.

**Ключевые слова:** тепловое излучение, комбинационное рассеяние, спонтанное и вынужденное излучение, открытые системы

EDN CIGLBJ

doi:[10.24412/2949-0553-2024-614-36-40](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2024-614-36-40)

## 1. Введение. Гипотеза Эйнштейна о вынужденном излучении

В 1917 году Альберт Эйнштейн [1] при выводе планковского спектра теплового излучения ввел понятие вынужденного излучения, показав, что помимо поглощения и спонтанного излучения нужно учитывать еще и этот процесс. Необходимость этого Эйнштейн обосновывал тем, что именно процесс вынужденного, а не спонтанного излучения является обратным процессу поглощения атомом кванта света (фотона).

Однако ценность работы [1] не ограничивается выводом формулы Планка. В ней было сделано утверждение, которое в настоящее время принято считать основой лазерной физики. Это утверждение Эйнштейна заключалось в том, что «если в результате облучения пучком лучей произойдет процесс  $Z_n \rightarrow Z_m$  (т.е. переход молекулы из состояния  $Z_n$  в состояние  $Z_m$ ), то молекула получит импульс  $(\varepsilon_m - \varepsilon_n) / c$  в направлении распространения пучка. В результате обратного процесса вынужденного излучения  $Z_m \rightarrow Z_n$  передаваемый импульс имеет такую же величину, но противоположное направление» [1]<sup>1</sup>. Эти рассуждения послужили для Эйнштейна основанием считать, что излученный фотон полностью идентичен падающим фотонам. Именно это утверждение сделало вынужденное излучение ответственным за усиление волны, распространяющейся по инверсно населенной среде, что в конце концов привело к созданию лазера.

Однако физические причины, лежащие в различиях вынужденного и спонтанного излучений, до конца не были поняты. Очевидно, что вынужденное излучение связано с квантовыми свойствами излучения. С точки зрения классической электродинамики трудно себе представить, что в приближении дипольного взаимодействия поля с субволновой частицей вещества возможно дельтаобразное рассеяние вперед.

## 2. Попытки доказательства гипотезы Эйнштейна

Для доказательства идентичности фотонов вынужденного и падающего излучений Эйнштейн руководствовался наиболее общими соображениями о сохранении энергии и импульса (см. также [3, 4]).

\* Автор, ответственный за переписку: Александр Александрович Пухов, [pukhov@mail.ru](mailto:pukhov@mail.ru)

<sup>1</sup> Современная интерпретация данного утверждения звучит так: «излучение, возникающее при вынужденном излучении, во всех отношениях идентично падающему излучению, т.е. частота, фаза и направление распространения вынужденного излучения совпадают с таковыми для падающего излучения» [2]

Однако в современных работах [2, 5] было показано, что сохранение энергии и импульса не гарантирует того, что свойства вынужденно излученного фотона дублируют свойства фотонов падающего излучения. Таким образом, утверждение Эйнштейна нужно воспринимать как гениальную догадку, которая вызывает чувство удивления и восхищения<sup>2</sup>

Строгое теоретическое объяснение идентичности испущенных фотонов падающим даже на уровне механизма отсутствует, что требует последовательного рассмотрения. Существуют лишь качественные рассуждения [6], связывающие это явление с бозе-статистикой фотонов, но эти рассуждения работают лишь в пределе очень большого числа фотонов и ничего не говорят о вероятности одновременного процесса спонтанного излучения.

Прямой эксперимент по наблюдению единичного акта вынужденного излучения в свободном пространстве затруднен, так как излучение нового фотона происходит в направлении падающего излучения, и чрезвычайно трудно зафиксировать появление одного нового фотона на фоне большого числа фотонов в падающем излучении. Если не предпринимать особых мер, то число падающих в одну секунду фотонов в лазере порядка  $10^{17}$ , что значительно больше единицы. С другой стороны, при уменьшении числа падающих фотонов до величины, сравнимой с единицей, становится крайне трудно отделить вынужденное излучение от спонтанного.

Для объяснения вынужденного излучения часто рассматривается одномодовая модель [6–11]. В такой модели испущенному фотону некуда излучиться, кроме как в рассматриваемую моду. Иными словами, априори предполагается, что вынужденное излучение с точки зрения направления и частоты идентично падающему излучению. Надо помнить, что одномодовая модель – это полезная идеализация. Применительно к лазерам она отчасти оправдана наличием в лазерах резонатора. Резонатор создает особенность в плотности состояний электромагнитных мод. Вследствие эффекта Пёрселла [12, 13] это приводит к тому, что возбужденные атомы, находящиеся в резонаторе, начинают излучать преимущественно в моду резонатора [14]. В отсутствие резонатора вопрос о природе и свойствах вынужденного излучения остался до конца не решенным несмотря на то, что для этого было предпринято множество попыток.

Явление вынужденного излучения связывают также с нелинейными свойствами инвертированной среды. Так в обзоре В. С. Старунова, И. Л. Фабелинского [15] отмечается: «Прохождение интенсивного света в нелинейной среде вызывает вынужденное рассеяние и ряд других явлений, таких как самофокусировка и дефокусировка света, разрушение твердых прозрачных диэлектриков, кавитация в жидкостях, возникновение плазмы и т. д. В какой мере вынужденное рассеяние связано со всеми названными явлениями — пока неясно, но этот вопрос продолжает исследоваться» [15].

### 3. Вынужденное излучение с точки зрения квантовой оптики. Пороговый характер вынужденного излучения

Ниже мы рассматриваем вынужденное излучение не как явление, отдельное от спонтанного излучения, а как спонтанное излучение в неравновесное состояние резервуара мод свободного пространства, когда одна из мод занята падающим излучением. В нашем рассмотрении мы следуем логике работы Вайскопфа-Вигнера [18]: при релаксации возбужденного атома фотон с соответствующей амплитудой вероятности излучается в любую из  $\mathbf{k}$ -мод свободного пространства, волновой вектор которой подчиняется дисперсионному соотношению  $|\mathbf{k}| = \omega_{ext}/c$ , где  $\omega_{ext}$  – частота падающего излучения, совпадающая с частотой квантового перехода атома<sup>3</sup>. *Но только когда фотон излучается в заполненную падающим излучением моду, интенсивность падающего поля меняется, а именно растет!* Именно это Эйнштейн и назвал вынужденным излучением. Все остальное – это спонтанное излучение<sup>4</sup>.

Резонансное взаимодействие атома<sup>5</sup> с квантованным полем мы описываем гамильтонианом Джейнса-Камингса [19], представленным в виде суммы трех членов:

$$H_{JC} = \hbar\omega_\sigma\sigma^\dagger\sigma + \sum_k \hbar\omega_\sigma a_k^\dagger a_k + \sum_k (\hbar\Omega) (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{\sigma}^+). \quad (1)$$

Здесь  $\hbar\omega_\sigma\sigma^\dagger\sigma$  является гамильтонианом ДУС,  $\hat{\sigma}^\dagger$ ,  $\hat{\sigma}$  – операторы рождения и уничтожения возбуждения

<sup>2</sup>Это подтверждается и самим Эйнштейном. Так в письме Микеланджело Бессо в ноябре 1916 года он писал: «На меня снизошло чудесное просветление о поглощении и испускании радиации» [2].

<sup>3</sup>Здесь мы пренебрегаем эффектами, связанными с отдачей, которые не играют в нашем рассмотрении определяющей роли. Вопросам отдачи атомов при эмиссии фотонов, реакции излучения посвящена масса литературы (см., например, [3, 4]).

<sup>4</sup>При взаимодействии атома с внешним полем происходит два основных процесса, которые надо разделять. Во-первых, это релеевское рассеяние, сопровождающееся при больших полях возникновением молювского триплета [19], во-вторых, это резонансное поглощение/испускание фотонов, связанное с переходами атома между стационарными состояниями. Здесь мы рассматриваем процессы поглощения и испускания фотонов, абстрагируясь от релеевского рассеяния.

<sup>5</sup>Для простоты мы рассматриваем атом как ДУС [21].

ДУС,  $\hbar\omega_\sigma$  – энергия возбуждения ДУС;  $\sum_k \hbar\omega_\sigma a_k^\dagger a_k$  является гамильтонианом мод резервуара свободного пространства, в которые переходит возбуждение атома при спонтанной релаксации,  $\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k$  – операторы рождения и уничтожения фотонов в  $\mathbf{k}$ -ой моде;  $\sum_k (\hbar\Omega) (\hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma} + \hat{a}_k \hat{\sigma}^+)$  – гамильтониан взаимодействия, ДУС с модами в приближении вращающейся волны<sup>6</sup>,  $\Omega = -d_{eg} \sqrt{2\pi\omega_a/V\hbar}$  частота Раби<sup>7</sup>, описывающая дипольное взаимодействие электромагнитного поля с ДУС.

Решение уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H_{JC} |\Psi(t)\rangle \quad (2)$$

мы будем искать, следуя Плачеку [23], в виде волновой функции, разложенной по собственным состояниям системы при нулевой частоте Раби, т.е. в пренебрежении взаимодействием атома с полем. Тогда амплитуда вероятности состояния системы, в котором атом возбужден, а в свободном пространстве возбуждена только мода  $\mathbf{k}_0$ , которая содержит  $n_{\mathbf{k}_0}$  фотонов, записывается в виде (см., например, [24,25])

$$G_{e,\mathbf{n}(\mathbf{k}_0)}(t) \exp(-i(n_{\mathbf{k}_0} + 1)\omega t) |e, 0, \dots, n_{\mathbf{k}_0}, 0\dots\rangle. \quad (3)$$

Экспоненциальный временной множитель образуется как произведение временного множителя возбужденного состояния атома и временного множителя «квантового осциллятора»  $\mathbf{k}_0$ -моды, содержащей  $n_{\mathbf{k}_0}$  квантов.

Амплитуда вероятности состояния, в которое переходит система при стимулированном излучении, т.е. когда атом не возбужден, а мода  $\mathbf{k}_0$  содержит  $n_{\mathbf{k}_0} + 1$  фотон, имеет вид

$$G_{g,\mathbf{n}(\mathbf{k}_0)}(t) \exp(-i(n_{\mathbf{k}_0} + 1)\omega t) |g, 0, \dots, n_{\mathbf{k}_0} + 1, 0\dots\rangle. \quad (4)$$

Амплитуды вероятности состояний, когда из-за спонтанного излучения возбуждены другие моды, можно записать как

$$C_{g,\mathbf{n}(\mathbf{k})}(t) e^{-i\omega t} |g, 0, \dots, 1_{\mathbf{k}}, 0, \dots, n_{\mathbf{k}_0}, 0, \dots, 0\rangle, \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0.$$

Отметим, что, так как полный базис, по которому идет разложение волновой функции, является набором собственных функций гамильтониана без учета взаимодействия атома с полем, то действие гамильтониана взаимодействия  $\sum_k (\hbar\Omega_a) (\hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma} + \hat{a}_k \hat{\sigma}^+)$  на волновые функции происходит согласно правилам [26]:

$$\begin{aligned} \hat{a} |n_0\rangle &= \sqrt{n_0} |n_0 - 1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger |n_0\rangle &= \sqrt{n_0 + 1} |n_0 + 1\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma |e\rangle &= |g\rangle, \quad \sigma |g\rangle = 0 \\ \sigma^\dagger |e\rangle &= 0, \quad \sigma^\dagger |g\rangle = |e\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно, амплитуда вероятности перехода при излучении фотона в конкретную моду пропорциональна  $\sqrt{(n_0 + 1)}$ , где  $n_0$  - число квантов в моде. При  $n_0 \gg 1$  основная часть фотонов будет излучаться именно в моду  $\mathbf{k}_0$ . Для полной картины явления надо выяснить, достаточно ли «основной» является эта часть фотонов для обеспечения превосходства вынужденного излучения в одну моду над спонтанным излучением в континуум мод.

Напомним, что решение уравнения Шрёдингера (2) с начальным условием (3) приводит к периодическим колебаниям Раби [28]. Как было указано выше, чтобы описать переход между состояниями ДУС, необходимо перейти к открытой системе, введя в рассмотрение взаимодействие с резервуаром, содержащим континуум мод. В качестве такого резервуара мы будем рассматривать моды пучка падающего излучения, которые образуют узкую линию  $|\mathbf{k}_0| = \omega_{ext}/c$  шириной  $\delta\mathbf{k}$  [28].

Ниже, для сравнения излучения атома в линию  $\mathbf{k}_0$  с излучением в остальное свободное пространство, мы группируем моды свободного пространства на сфере радиуса  $|\mathbf{k}| = \omega_{ext}/c$  в пучки ширины  $|\delta\mathbf{k}|^2$ . Тогда сумма в выражении гамильтониана взаимодействия  $\sum_k (\hbar\Omega_a) (\hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma} + \hat{a}_k \hat{\sigma}^+)$  становится конечной.

<sup>6</sup>В данном приближении в решении отбрасываются быстро осциллирующие члены, изменяющиеся с удвоенной частотой.

<sup>7</sup>Заметим, что при стремлении объема квантования к бесконечности ( $V \rightarrow \infty$ ) частота Раби стремится к нулю ( $\Omega \rightarrow 0$ ). Для получения осмысленного результата нужно перейти к рассмотрению пакета фотонов. В этом случае, как показано в [22], в качестве объема квантования надо брать объем пакета, и все величины становятся конечными.

При спонтанном излучении один фотон переходит в одно из  $(4\pi|\mathbf{k}|^2/|\delta\mathbf{k}|^2 - 1)$  состояний,  $(n_0 + 1)$  фотон переходит в пучок падающего поля. Поэтому при  $n_0 \gg 4\pi|\mathbf{k}|^2/|\delta\mathbf{k}|^2$  вынужденное излучение превалирует над спонтанным.

Резюмируя, можно сказать, что утверждение Эйнштейна об эквивалентности испущенного фотона падающим верно только в асимптотическом пределе, при  $n_0 \gg 4\pi|\mathbf{k}|^2/|\delta\mathbf{k}|^2$ .

#### 4. Заключение

Найден порог эйнштейновского вынужденного излучения. Оно проявляется лишь при превышении вероятностью излучения в падающую моду суммы вероятностей спонтанного излучения в остальные моды свободного пространства.

#### Список литературы

- [1] Эйнштейн А. О квантовой теории излучения. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.3.
- [2] Watkins T. Coherence in Stimulated Emission // <https://www.sjsu.edu/faculty/watkins/stimem.htm>, дата обращения: 06.06.2024.
- [3] Smecal A. Zur Quantentheorie der Dispersion // Naturwissenschaften, 1923. V. II. S. 873 - 875. doi: [10.1007/BF01576902](https://doi.org/10.1007/BF01576902), EDN: [WZKXWS](https://www.edn.net/WZKXWS)
- [4] Виноградов А. П. Комментарий к статье А. Смекаля "К квантовой теории рассеяния" // Современная электродинамика, 2023. № 4 (6). с. 49. doi: [10.24412/2949-0553-2023-46-50-57](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2023-46-50-57), EDN: [BRFAUF](https://www.edn.net/BRFAUF)
- [5] Friedberg R. Einstein and stimulated emission: A completely corpuscular treatment of momentum balance, // American Journal of Physics, 1994. V. 62, pp. 26-32. doi: [10.1119/1.17737](https://doi.org/10.1119/1.17737)
- [6] Квантовая механика. в 2-х томах / Под ред. К. Б. Коэн-Таннуджи, Ф. Диу, Лаллоэ, - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2000. 800 с.
- [7] Лоудон Р. Квантовая теория света. М.: Мир, 1976. 487 с.
- [8] Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 896 с.
- [9] Sakurai J. J. Modern Quantum Mechanics. NY: Addison-Wesley, 1985. 571 с.
- [10] Пантел П., Путхов Г. Основы квантовой электроники. М.: Мир: 1972. 383 с.
- [11] Быков В.П., Силичев О.О. Лазерные резонаторы. М.: ФМЗИАТЛИТ, 2004. 320 с. EDN: [QMNEDV](https://www.edn.net/QMNEDV)
- [12] Purcell E. M. Resonance Absorption by Nuclear Magnetic Moments in a Solid // Physical Review 1946. V. 69 681. doi: [10.1103/PhysRev.69.37](https://doi.org/10.1103/PhysRev.69.37)
- [13] Виноградов А. П., Пухов А. А., Перевод и комментарии статьи Пёрселла "Вероятности спонтанного излучения на радиочастотах" (E. M. Purcell. Spontaneous emission probabilities at radio frequencies // Physical review, 69, 681, (1946)) // Современная электродинамика. 6(8) 38-40, 2023. doi: [10.24412/2949-0553-2023-68-38-40](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2023-68-38-40), EDN: [FBQSBA](https://www.edn.net/FBQSBA)
- [14] Doronin I.V., Zhablovsky A.A., Andrianov E.S., et al. Universal lasing condition // Scientific Reports. 2021, V. 11(1) p. 4197 (10 pp). doi: [10.1038/s41598-021-83701-3](https://doi.org/10.1038/s41598-021-83701-3), EDN: [MWOUFC](https://www.edn.net/MWOUFC)
- [15] Старунов В. С., Фабелинский И. Л., Вынужденное рассеяние Манделъштама-Бриллюэна и вынужденное энтропийное (температурное) рассеяние света. // Успехи физических наук, 1969 Т. 98. С. 441-491. doi: [10.3367/UFNr.0098.196907b.0441](https://doi.org/10.3367/UFNr.0098.196907b.0441)
- [16] Киселев В.В. Квантовая механика. М: МЦНМО 2023. 720 с.
- [17] Ballentine L. E. Quantum Mechanics. A modern development. Singapore: World Scientific Publishing 2000. 673 с.
- [18] Weisskopf V. F., Wigner E. P., Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie. // Zeitschrift der Physik. 1930. V. 63 54-73. doi: [10.1007/BF01336768](https://doi.org/10.1007/BF01336768)
- [19] Mollow B R. Power Spectrum of Light Scattered by Two-Level Systems // Physical Review. 1969. V. 188 p. 1969-1975. doi: [10.1103/PhysRev.188.1969](https://doi.org/10.1103/PhysRev.188.1969)
- [20] Shore B W, Knight P L. The Jaynes-Cummings Model, // Journal of Modern Optics. 1993. V. 40 pp 1195-1238. doi: [10.1080/09500349314551321](https://doi.org/10.1080/09500349314551321), EDN: [YBYNPD](https://www.edn.net/YBYNPD)

- [21] Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир 1978. 222 с.
- [22] A. J. Wünsche. Quantization of Gauss-Hermite and Gauss-Laguerre beams in free space. // Journal of Optics B. 2004. V. 6. p. 47 - 59. doi: [10.1088/1464-4266/6/3/009](https://doi.org/10.1088/1464-4266/6/3/009), EDN: XSWSRQ
- [23] Плачек Г. Релеевское рассеяние и Раман эффект. Харьков: ОНТИ, 1935. 172 с.
- [24] Галицкий В. М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике часть 2. М.: Едиториал УРСС, 2001. 304 с.
- [25] Белоусов Ю. М., Бурмистров С. Н., Тернов А. И. Задачи по теоретической физике. Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”, 2013. с 407.
- [26] Давыдов А. С. Квантовая механика. М.: “Наука”, Главная редакция физико-математической литературы, 1973. 704 с.
- [27] Rabi I. I. Space Quantization in a Gyating Magnetic Field // Physical Review, 1937. V. 51. p. 652- 654. doi: [10.1103/PhysRev.51.652](https://doi.org/10.1103/PhysRev.51.652)
- [28] Lisiansky A. A., Andrianov Eu. S., Vinogradov A.P., Shishkov V. Yu. Quantum Optics of Light Scattering. NY: Springer, June 2024. doi: [10.1007/978-3-031-56638-7](https://doi.org/10.1007/978-3-031-56638-7)

## Stimulated emission as a threshold phenomenon

A.P. Vinogradov<sup>1,2</sup>, E.S. Andrianov<sup>1,2</sup>, A.A. Pukhov<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup> Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA), Moscow, Russia

\* pukhov@mail.ru

### Abstract

It is shown that stimulated emission is essentially the same spontaneous emission, but the emission of a photon occurs not in an empty mode, but in a mode containing photons. According to the number of photons in this mode, the phenomenon has a threshold character.

**Key words:** thermal radiation, Raman scattering, spontaneous and stimulated emission, open systems