

# Условия и критерии слабой угловой зависимости поверхностного импеданса однослойного магнетодиэлектрического покрытия

А.С. Маслов<sup>1,2</sup>, В.Н. Кисель \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)", Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 20.05.2025

Одобрена после рецензирования 30.05.2025

Принята к публикации 30.06.2025

## Аннотация

В ряде случаев для расчёта рассеивающих свойств гладких объектов с покрытиями используют понятие поверхностного импеданса. При этом важно, чтобы зависимостью импеданса от угла и поляризации можно было бы пренебречь. В работе рассмотрены условия, при которых с заданной точностью реализуется приближение постоянного импеданса для случая однослойного покрытия из магнетодиэлектрика, размещённого на металлической поверхности. На примерах показано, что приближение постоянного импеданса применимо не всегда, из-за чего может возникать существенная ошибка расчёта коэффициента отражения покрытия или полей рассеяния тел с покрытиями. Предложены критерии применимости приближения постоянного импеданса. Показано, что относительное отклонение импеданса от постоянного значения определяется только двумя параметрами задачи: электрической плотностью  $\varkappa = \sqrt{\varepsilon\mu}$  и произведением  $kd$  волнового числа в вакууме  $k$  на толщину покрытия  $d$ . Проанализировано поведение функции относительного отклонения импеданса при различных значениях  $\varkappa$  и  $kd$ . Показано, что если вдоль толщины покрытия укладывается целое число четвертей длины волны, а покрытие имеет малые потери, то приближение постоянного импеданса неприменимо. Получены приближенные выражения для расчёта относительного отклонения импеданса при  $|\varkappa| \gg 1$  и простые формулы для качественного анализа.

**Ключевые слова:** магнетодиэлектрическое покрытие, импеданс, коэффициент отражения, угловая зависимость, поляризация

EDN XHUNBN

doi:[10.24412/2949-0553-2025-317-14-26](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2025-317-14-26)

---

## Conditions and criteria for weak angular dependence of the surface impedance of a single-layer magnetodielectric coating

A.S. Maslov<sup>1,2</sup>, V.N. Kisel\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Moscow Institute of Physics and Technologies, Moscow, Russia

\* kis\_v@mail.ru

---

\* Автор, ответственный за переписку: Владимир Николаевич Кисель, kis\_v@mail.ru

### Abstract

In some cases, the concept of surface impedance is used to calculate the scattering properties of smooth coated objects. At that, it is important that the dependence of the impedance on the incidence angle and polarization factor can be ignored. The paper considers the conditions under which the constant impedance approximation is performed with a given accuracy for the case of a single-layer coating of a magnetodielectric placed on a metal surface. The examples show that the constant impedance approximation is not always applicable, which may lead to a significant error in calculating the reflection coefficient of the coating or the scattering fields of coated bodies. Criteria for the applicability of the constant impedance approximation are proposed. It is shown that the relative deviation of the impedance from a constant value is determined by only two parameters of the problem: the electrical density  $\varkappa = \sqrt{\varepsilon\mu}$  and the product  $kd$ , where  $k$  is the free-space wavenumber and  $d$  is the thickness of the coating. The angular dependence of the relative impedance deviation function at various values of  $\varkappa$  and  $kd$  is analyzed. It is shown that if the thickness of low-loss coating constitutes an integer number of quarters of the wavelength, then the constant impedance approximation is not applicable. Approximate expressions for calculating the relative deviation of the impedance at  $|\varkappa| \gg 1$  and simple expressions for qualitative analysis are obtained.

**Key words:** magnetodielectric coating, impedance, reflection coefficient, angular dependence, polarization

## Введение

Для оптимального выбора геометрических и электродинамических параметров магнитодиэлектрических покрытий с учётом конкретных условий их применения приходится проводить значительный объём исследований, включающих электродинамическое моделирование объектов с такими покрытиями. Соответствующие расчёты, в которых применяются строгие численные методы, например, основанные на решении интегральных уравнений методом моментов, требуют высоких затрат вычислительных ресурсов: оперативной памяти, процессорного времени. Эти затраты удаётся значительно снизить с применением специальных методик и обоснованных приближений. Например, в [1, 2] для учёта свойств магнитодиэлектрического покрытия при расчёте рассеяния от полости значительных размеров применялись граничные условия импедансного типа, что позволило существенно снизить требуемые ресурсы ЭВМ. В [3, 4] описаны способы оптимизации параметров покрытия, при использовании которых покрытие описывается с помощью одного комплексного числа – эквивалентного поверхностного импеданса, что позволяет резко сократить количество оптимизируемых параметров и объём вычислений.

Поверхностный импеданс  $Z$  определяется как отношение касательных компонент электрического  $E_\tau$  и магнитного  $H_\tau$  полей на поверхности, его значение определяет согласование, т.е. эффективность передачи и поглощения энергии электромагнитной волны в объёме материала. В общем случае импеданс покрытия гладкого тела достаточной произвольной формы в данной точке зависит от координат этой точки  $\vec{r}$ , угла падения  $\theta$  и поляризации  $p$  электромагнитной волны, от электродинамических свойств покрытия (диэлектрической  $\varepsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостей материала), толщины слоя покрытия  $d$ :  $Z = Z(\vec{r}, \theta, p, \varepsilon, \mu, d)$ . Если поверхность в каждой точке имеет достаточно большой радиус кривизны, то локально её можно рассматривать как плоскую. Тогда импеданс в каждой точке покрытия можно считать равным импедансу покрытия, нанесенного на проводящую плоскость, касательную к телу в данной точке, и если покрытие выполнено в виде однородного слоя постоянной толщины, то его импеданс не будет зависеть от координат  $\vec{r}$ . Обычно для покрытий, характеризующихся значительными электромагнитными потерями, зависимость импеданса от угла падения волны  $\theta$  при любой поляризации (перпендикулярной, параллельной:  $p = \perp, \parallel$ ) незначительная:  $Z^\parallel(\theta) \approx Z_0$ ,  $Z^\perp(\theta) \approx Z_1$ . Более того,  $Z_0 = Z_1$ , так как при падении волны по нормали к покрытию значение импеданса, очевидно, от поляризации не зависит. Таким образом, если импеданс покрытия считать постоянным  $Z(\vec{r}, \theta, p) = \text{const}$ , то удаётся описать покрытие с помощью всего лишь одного комплексного числа, что позволяет резко сократить объёмы расчётов и уменьшить количество оптимизируемых параметров для выбора конкретного покрытия, удовлетворяющего заданию. Однако предположение  $Z(\vec{r}, \theta, p) = \text{const}$  применимо не всегда. Например, при некоторых значениях толщины слабопоглощающего покрытия применение импедансного приближения может вносить существенную ошибку в расчёты.

Ниже рассмотрены условия, при которых с заданной точностью реализуется приближение постоянного импеданса для случая однослойного покрытия из магнитодиэлектрика, размещённого на металлической поверхности, и предложены критерии применимости этого приближения.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, падающую на бесконечную металлическую плоскость, на которую нанесен слой однородного изотропного магнитоэлектрического покрытия постоянной толщины  $d$ . Получим условия и критерии применимости импедансного приближения для данного покрытия. На рисунке 1 изображён случай параллельной поляризации, когда вектор напряжённости электрического поля лежит в плоскости падения.

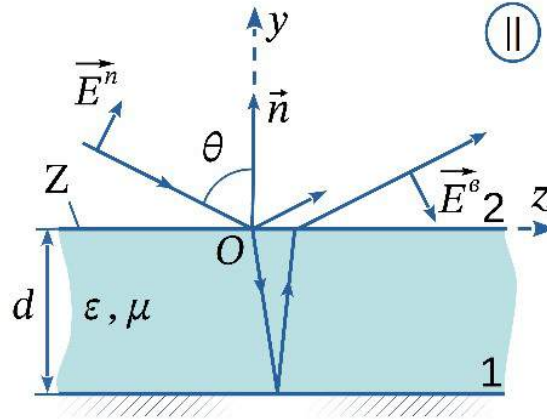


Рисунок 1 – Падение плоской электромагнитной волны на проводящую плоскость с однородным покрытием постоянной толщины

Применяя метод комплексных амплитуд (зависимость от времени выбрана в виде  $e^{i\omega t}$ ), представим падающую электромагнитную волну в виде:

$$\vec{E}^{\vec{n}} = E_0(\vec{e}_y \sin \theta + \vec{e}_z \cos \theta)e^{ik(y \cos \theta - z \sin \theta)}, \quad (1)$$

$$\vec{H}^{\vec{n}} = -\frac{E_0}{W_0}\vec{e}_x e^{ik(y \cos \theta - z \sin \theta)}, \quad (2)$$

где  $k = |\vec{k}|$  – модуль волнового вектора электромагнитной волны в вакууме.

Коэффициент отражения  $R$  характеризует амплитуду отраженной волны:

$$\vec{E}^{\vec{b}} = E_0 R(-\vec{e}_y \sin \theta + \vec{e}_z \cos \theta)e^{-ik(y \cos \theta + z \sin \theta)}, \quad (3)$$

$$\vec{H}^{\vec{b}} = \frac{E_0}{W_0} R \vec{e}_x e^{-ik(y \cos \theta + z \sin \theta)}. \quad (4)$$

Отметим, что данные формулы записаны для параллельной поляризации, для перпендикулярной соответствующие выражения получаются аналогичным образом.

Для границы «покрытие – свободное пространство» запишем импедансное граничное условие Леонтовича [5]:

$$[\vec{n} \times \vec{E}] = Z [\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{H}]], \quad (5)$$

где  $\vec{n}$  – внутренняя нормаль по отношению к области (рисунок 1), в которой рассматривается распространение электромагнитных волн.

Применяя импедансное граничное условие (5) для рассматриваемой задачи, получим для двух основных поляризаций зависимость коэффициента отражения  $R$  от импеданса  $\hat{Z} = Z/W_0$ , нормированного на волновое сопротивление свободного пространства  $W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$  Ом:

$$R^\perp = \frac{\hat{Z}^\perp \cos \theta - 1}{\hat{Z}^\perp \cos \theta + 1}, \quad R^\parallel = \frac{\hat{Z}^\parallel - \cos \theta}{\hat{Z}^\parallel + \cos \theta}. \quad (6)$$

Записывая граничные условия о непрерывности касательных компонент напряжённости электрического и магнитного полей на границах раздела сред, получим зависимость коэффициента отражения от параметров покрытия для перпендикулярной и параллельной поляризации падающего поля:

$$R^\perp = \frac{C\mu \cos \theta - \varkappa_1}{C\mu \cos \theta + \varkappa_1}, \quad R^\parallel = \frac{C\varkappa_1 - \varepsilon \cos \theta}{C\varkappa_1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad (7)$$

где

$$C = i \operatorname{tg}(\varkappa_1 kd), \quad \varkappa_1 = -\sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2 \theta}. \quad (8)$$

С помощью полученных соотношений выразим зависимость поверхностного импеданса плоского однородного покрытия от его параметров:

$$\hat{Z}^\perp = \frac{\mu}{\varkappa_1} i \operatorname{tg}(\varkappa_1 kd), \quad R^\parallel = \frac{\varkappa_1}{\varepsilon} i \operatorname{tg}(\varkappa_1 kd). \quad (9)$$

Эти формулы точные, поскольку при их получении никакие приближения не применялись.

## 2. Зависимость импеданса от угла падения

В качестве примера вычислим с помощью полученных выражений (9) зависимость поверхностного импеданса от угла падения волны  $\theta$  для двух видов покрытий, параметры которых достаточно типичны для использования на практике. Рассчитанные зависимости модуля импеданса от угла падения волны представлены на рисунке 2. У материала первого покрытия значения диэлектрической  $\varepsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостей равны  $\varepsilon = 13,2 - 1,1i$  и  $\mu = 1,9 - 1,3i$ . Для второго – соответственно  $\varepsilon = 3,0 - 0,5i$  и  $\mu = 1,2 - 0,8i$ . Толщина каждого покрытия  $d = 1$  мм, длина волны  $\lambda = 32$  мм. Видно, что зависимость модуля импеданса от угла падения волны монотонная и достаточно гладкая. Для первого покрытия (рисунок 2а) импеданс почти не зависит от угла падения и поляризации, и поэтому для такого покрытия с хорошей точностью применимо приближение постоянного импеданса. Такую зависимость импеданса от угла падения будем называть слабой. В то же время для второго покрытия (рисунок 2б) импеданс для параллельной поляризации значительно меняется при изменении угла падения волны.

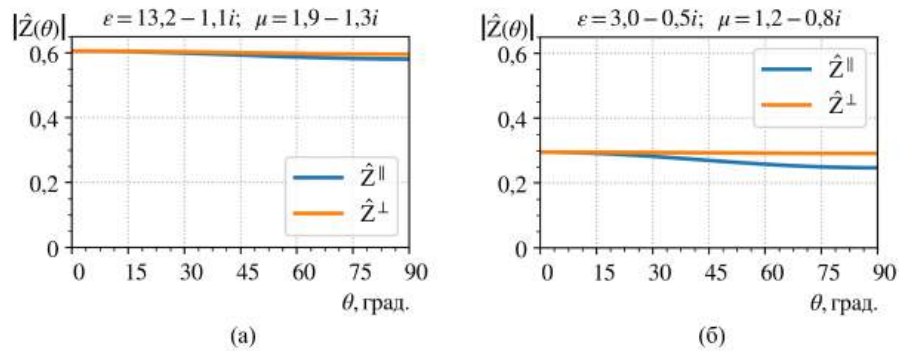


Рисунок 2 – Угловые зависимости модуля импеданса от угла падения волны для двух покрытий одинаковой толщины из различных материалов при параллельной и перпендикулярной поляризациях

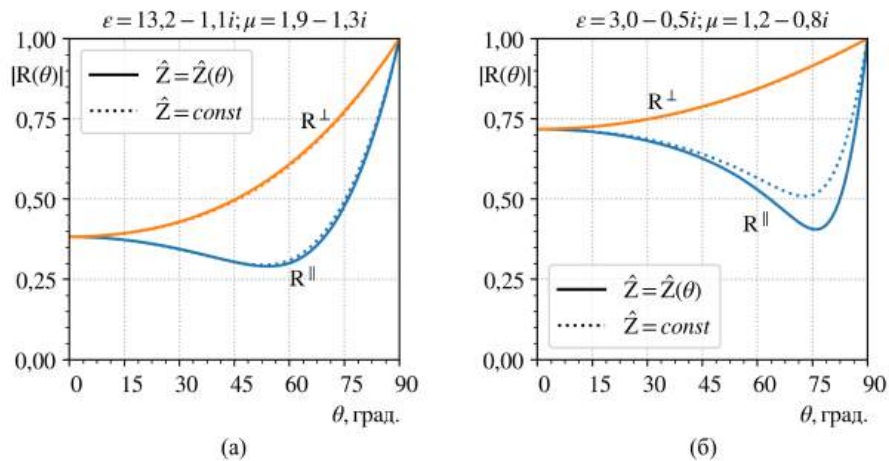


Рисунок 3 – Зависимости модуля коэффициента отражения от угла падения волны для двух покрытий одинаковой толщины из различных материалов

Для рассматриваемых покрытий построим графики зависимости коэффициента отражения по амплитуде от угла падения волны для обеих поляризаций, вычисленные двумя способами (рисунок 3). В первом случае будем использовать точные формулы (6 - 9) (сплошная линия), а во втором случае применим приближение постоянного импеданса, значение которого вычисляется при нормальном падении волны, когда угол  $\theta = 0^\circ$  (пунктирная линия).

По графикам видно, что когда зависимость импеданса от угла падения слабая (рисунок 3а), ошибка модуля коэффициента отражения мала, в то время как для материала, у которого импеданс значительно зависит от угла падения, ошибка модуля коэффициента отражения для параллельной поляризации существенна (рисунок 3б).

### 3. Критерий слабой зависимости импеданса от угла падения волны

В качестве критерия слабой зависимости импеданса можно рассмотреть его максимальное относительное отклонение  $\delta_Z$  от приближённого постоянного значения  $\hat{Z}_{\text{const}}$ :

$$\delta_Z = \max_{\theta, p} \left| \frac{\hat{Z}(\theta, p) - \hat{Z}_{\text{const}}}{\hat{Z}_{\text{const}}} \right| < \Delta, \quad (10)$$

где  $\hat{Z}(\theta)$  – точная зависимость импеданса от угла падения и поляризации, максимум выбирается из всего диапазона углов падения волны для обеих поляризаций. Если отклонение импеданса  $\delta_Z$  меньше определённого малого числа  $\Delta$ , которое определяется особенностями конкретной задачи, то приближение постоянного импеданса применимо к данному покрытию. В противном же случае для численного моделирования покрытия следует применять не импедансное приближение, а более точные методы.

Для рассмотренных ранее покрытий (рисунок 2) видно, что наибольшая разность значений модулей импеданса достигается при углах падения  $0^\circ$  и  $90^\circ$ , поэтому в работе будем рассматривать упрощённый критерий:

$$\delta_Z(p) = \left| \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_0}{\hat{Z}_0} \right|, \quad (11)$$

где  $\hat{Z}_0 = \hat{Z}(\theta = 0^\circ, p)$ ,  $\hat{Z}_1 = \hat{Z}(\theta = 90^\circ, p)$  при фиксированном виде поляризации  $p$ , в качестве приближённого значения импеданса  $\hat{Z}_{\text{const}}$  принимается значение импеданса при угле падения  $0^\circ$ . После анализа поведения функции отклонения импеданса для отдельных поляризаций  $\delta_Z^{\parallel}$ ,  $\delta_Z^{\perp}$  будет целесообразно перейти к рассмотрению максимального отклонения  $\delta_Z^{\text{max}} = \max(\delta_Z^{\parallel}, \delta_Z^{\perp})$ .

В качестве альтернативного критерия можно было бы рассмотреть относительное отклонение не импеданса, а его модуля  $\delta_{|Z|}$ :

$$\delta_{|Z|} = \left| \frac{|\hat{Z}_1| - |\hat{Z}_0|}{|\hat{Z}_0|} \right|. \quad (12)$$

Однако при таком определении критерия не удаётся получить удобные для аналитического анализа выражения. Отметим, что согласно неравенству треугольника отклонение, записанное в формулировке (12), не превышает введенное ранее (11):

$$\delta_{|Z|} = \left| \frac{|\hat{Z}_1| - |\hat{Z}_0|}{|\hat{Z}_0|} \right| \leq \left| \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_0}{\hat{Z}_0} \right| = \delta_Z. \quad (13)$$

Подставляя зависимости импеданса от угла падения (9) в критерий (11), получаем точные формулы для вычисления отклонения импеданса плоского однородного покрытия:

$$\begin{aligned} \delta_Z^{\parallel} &= \left| \frac{\sqrt{\varkappa^2 - 1}}{\varkappa} \cdot \frac{\text{tg} \sqrt{\varkappa^2 - 1} kd}{\text{tg}(\varkappa kd)} - 1 \right|, \\ \delta_Z^{\perp} &= \left| \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - 1}} \cdot \frac{\text{tg} \sqrt{\varkappa^2 - 1} kd}{\text{tg}(\varkappa kd)} - 1 \right|, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\varkappa = \sqrt{\varepsilon\mu}$  – электрическая плотность материала покрытия.

Из полученных выражений видно, что отклонение импеданса зависит только от комплекснозначной электрической плотности  $\varkappa$  и от произведения  $kd$ . Поэтому каждое покрытие описывается точкой в трёхмерном пространстве  $(\text{Re}(\varkappa), \text{Im}(\varkappa), kd)$ . Для анализа поведения функции отклонения импеданса будем рассматривать плоскости в этом пространстве при фиксированном произведении  $kd$  (рисунок 4).

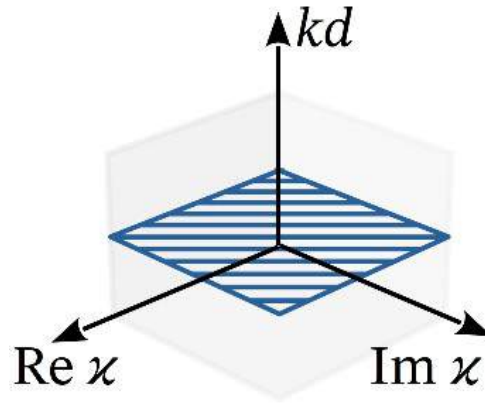


Рисунок 4 – Плоскости  $(\text{Re}(\kappa), \text{Im}(\kappa))$  в трёхмерном пространстве  $(\text{Re}(\kappa), \text{Im}(\kappa), kd)$

Построим двумерные контурные диаграммы (рисунок 5) для анализа асимптотического поведения функции отклонения импеданса при малых значениях электрической плотности  $\kappa$ . Цветная шкала наряду с изолиниями показывает величину отклонения импеданса в децибелах, по осям координат этих диаграмм отложены значения  $\text{Re}(\kappa)$  и  $\text{Im}(\kappa)$ , поэтому каждая точка в поле диаграммы соответствует определённому значению электрической плотности покрытия. В качестве примера на диаграммах цифрами в круговых метках отмечены значения параметра  $\kappa$  для материалов нескольких типовых покрытий, разработанных и используемых в ИТПЭ РАН. Видно, что во всех случаях отклонение импеданса (которое можно считать максимальной ошибкой, возникающей при замене реального значения импеданса его постоянным значением) не превышает 10%.

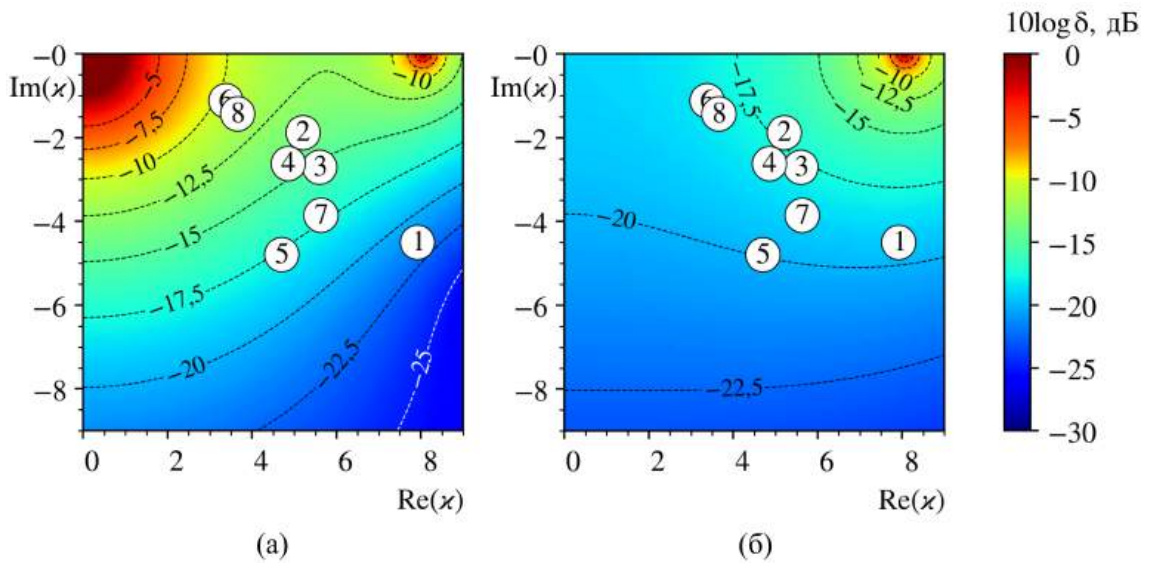


Рисунок 5 – Двумерные контурные диаграммы отклонения импеданса при  $d = 1$  мм,  $\lambda = 32$  мм при параллельной (а) и перпендикулярной (б) поляризациях

На диаграммах красным цветом обозначены области, в которых ошибка импеданса велика. Будем называть эти области зонами максимума ошибки импеданса и пронумеруем их, начиная с нуля. Получим выражение, позволяющее вычислять координату  $\kappa_{\text{max}}$  этих областей при фиксированном значении  $kd$ . Из формул (14) следует, что ошибка импеданса максимальна (стремится к бесконечности), когда знаменатель дроби обращается в ноль:

$$\cos(\sqrt{\kappa_{\text{max}}^2 - 1}kd) = 0 \quad \text{или} \quad \sin(\kappa_{\text{max}}kd) = 0. \quad (15)$$

Уравнения (15) можно решать точно, но для анализа удобна приближённая формула, которая

получается в предположении, что электрическая плотность достаточно велика,  $|\varkappa|^2 \gg 1$ , что обычно имеет место на практике. При этом получаем:

$$\varkappa_{\max} \approx \frac{\pi n}{2kd}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0. \quad (16)$$

Эта формула позволяет с точностью 10% вычислять  $\varkappa_{\max}$  по  $kd$ , если  $kd < 0,7$ . У полученного соотношения есть прозрачный физический смысл. Так как  $\varkappa kd = 2\pi d/\lambda_1$ , где  $\lambda_1$  – длина волны в покрытии, то

$$\frac{d}{\lambda_1} = \frac{n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad (17)$$

то есть отклонение импеданса от постоянного значения максимально, когда вдоль толщины покрытия укладывается целое число четвертей длин волн.

С помощью формул (14) можно показать, что при  $|\varkappa| \rightarrow 0$ ,  $kd = \text{const}$

$$\delta_Z^\perp \rightarrow \left| \frac{\text{th}(kd)}{kd} - 1 \right| = \text{const}, \quad \delta_Z^\parallel \rightarrow \infty. \quad (18)$$

В то же время при  $|\varkappa| \rightarrow \infty$  отклонение импеданса стремится к нулю, что подробнее будет рассмотрено ниже, в разделе 4. Это означает, что приближение постоянного импеданса применимо с максимально высокой точностью для достаточно плотных покрытий с выраженными радиопоглощающими свойствами.

Чтобы проиллюстрировать описанные выше свойства, построим аналогичные диаграммы при больших значениях  $|\varkappa|$  (рисунок 6).

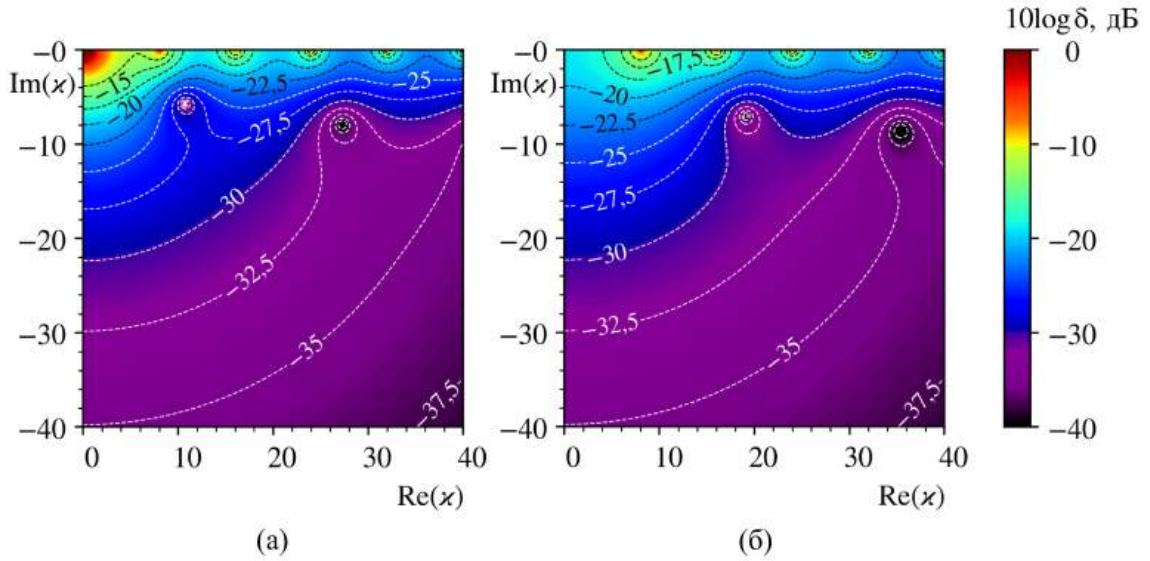


Рисунок 6 – Двумерные контурные диаграммы отклонения импеданса при  $d = 1$  мм,  $\lambda = 32$  мм при параллельной (а) и перпендикулярной (б) поляризациях

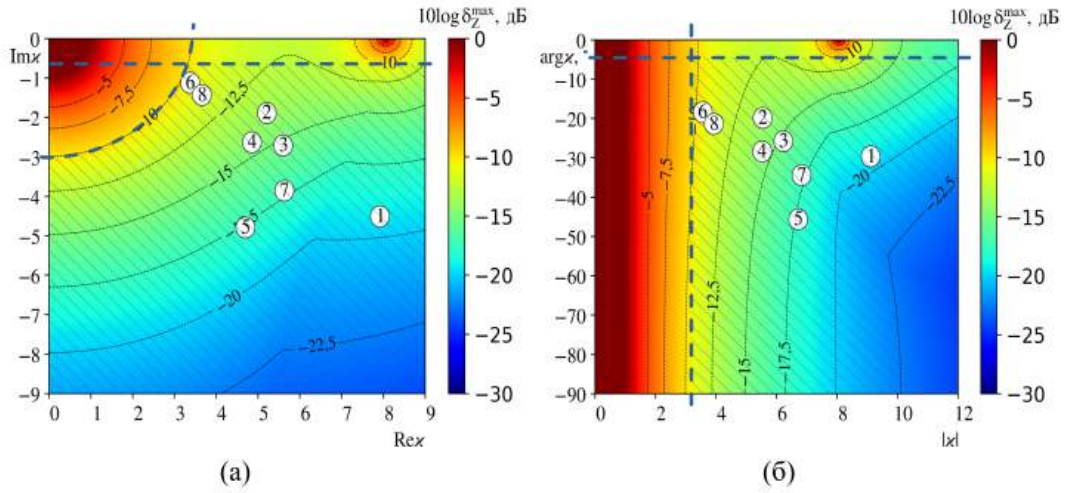
Из диаграмм видно, что при  $|\varkappa| \rightarrow \infty$  ошибка импеданса  $\delta_Z \rightarrow 0$ , но в окрестностях максимумов, когда  $\text{Im}(\varkappa) \approx 0$ , ошибка существенна. При этом на большом удалении от максимумов, когда  $\text{Im}(\varkappa) < 0$ ,  $|\text{Im}(\varkappa)| \gg 1$  изолинии уровня ошибки импеданса являются окружностями.

В практических задачах поляризация падающего излучения обычно может быть произвольной, поэтому чтобы определить применимость импедансного приближения целесообразно рассматривать следующий критерий:

$$\delta_Z^{\max} = \max(\delta_Z^\perp, \delta_Z^\parallel). \quad (19)$$

## 4. Качественный критерий

Получим выражения, удобные для качественного анализа. Построим графики максимальной ошибки импеданса  $\delta_Z^{\max}$  и по осям отложим либо действительную и мнимую части  $\varkappa$  (рисунок 7а), либо модуль и аргумент  $\varkappa$  (рисунок 7б).


 Рисунок 7 – Диаграммы максимального отклонения импеданса при  $d = 1$  мм,  $\lambda = 32$  мм

Из рисунка 7б видно, что величина отклонения импеданса почти не зависит от аргумента  $\chi$ , она в основном определяется значением модуля электрической плотности  $|\chi|$ . Поэтому в качестве критерия того, что ошибка импеданса при данном значении  $kd$  меньше, например,  $\Delta = 10\%$ , можно рассматривать  $|\chi| > 3$  и  $\arg \chi < -5^\circ$ . Второе условие учитывает наличие максимумов, вместо него можно рассмотреть эквивалентное  $\text{Im} \chi < -0,6$ . Получим общие выражения для этого критерия.

#### 4.1. Приближенные формулы для $\delta_z^{\max}$ при $|\chi| \gg 1$

Введем обозначения:  $\gamma_0 = \chi kd$ ,  $\gamma_1 = \sqrt{\chi^2 - 1} kd$ . Для больших значений  $|\chi|$  в выражениях (14) можно удерживать лишь первые члены соответствующих разложений в ряд Тейлора:

$$\sqrt{\chi^2 - 1} \approx \chi \left(1 - \frac{1}{2\chi^2}\right). \quad (20)$$

Тангенс представим в виде отношения экспонент:

$$i \text{tg}(\gamma_1) = \frac{1 - e^{-2i\gamma_1}}{1 + e^{-2i\gamma_1}} \quad (21)$$

и используем усеченный ряд Тейлора:

$$e^{-2i\gamma_1} \approx e^{-2i\gamma_0} \left(1 + i \frac{kd}{\chi}\right). \quad (22)$$

При этом предполагаем, что  $\left|\frac{kd}{\chi}\right| \ll 1$ , что эквивалентно  $|kd| \ll |\chi|$ . Подставляя (22) в (21), получаем:

$$i \text{tg}(\gamma_1) \approx i \text{tg}(\gamma_0) \cdot \left(1 - i \frac{kd}{\chi} \cdot \frac{1}{e^{+2i\gamma_0} - 1}\right) \cdot \left(1 - i \frac{kd}{\chi} \cdot \frac{1}{e^{+2i\gamma_0} + 1}\right) \quad (23)$$

При выводе этой формулы предполагалось, что  $|e^{+2i\gamma_0} - 1|$  и  $|e^{+2i\gamma_0} + 1|$  не являются малыми величинами по сравнению с  $\left|\frac{kd}{\chi}\right|$ . В частности, эти условия выполнены при больших по модулю значениях мнимой части  $\gamma_0$ :  $\text{Im}(\gamma_0) < 0$ ,  $|\text{Im}(\gamma_0)| \gg 1$ . Подставляя полученные соотношения (20) и (23) в (14), перемножая слагаемые в скобках и пренебрегая малыми второго порядка, получаем следующие приближенные формулы:

$$\delta_z^{\parallel} = \left| -\frac{1}{2\chi^2} - \frac{kd}{\chi} \cdot \frac{1}{\sin(2\chi kd)} \right|, \quad \delta_z^{\perp} = \left| +\frac{1}{2\chi^2} - \frac{kd}{\chi} \cdot \frac{1}{\sin(2\chi kd)} \right| \quad (24)$$

Применяя неравенство треугольника, получаем оценку сверху для максимальной ошибки импеданса:

$$\delta_z^{\max} \leq \left| \frac{1}{2\chi^2} \right| + \left| \frac{kd}{\chi} \cdot \frac{1}{\sin(2\chi kd)} \right|. \quad (25)$$

Условия, при которых были получены эти формулы, а именно:  $|\varkappa| \gg |1|$ ,  $|kd| \ll |\varkappa|$  и условие, что  $|e^{+2i\gamma_0} \pm 1|$  не мало по сравнению с  $|\frac{kd}{\varkappa}|$ , как правило, выполняются, если рассматриваются достаточно плотные покрытия с выраженным радиопоглощением. Применяемые в ИТПЭ РАН покрытия соответствуют приведённым критериям. Из этих соотношений также следует, что  $\delta_Z \rightarrow 0$  при  $|\varkappa| \rightarrow \infty$ . Интересно заметить, что формулы (24) и (25) приближённо описывают рассмотренные ранее (см. (15)-(17)) максимумы, хотя и были получены при противоположных условиях, что  $|e^{+2i\gamma_0} \pm 1|$  не малая величина, и в частности,  $x \neq \frac{\pi n}{2kd}$ :

$$\sin(2\varkappa kd) = 0 \Leftrightarrow \varkappa = \frac{\pi n}{2kd} \approx \varkappa_{\max}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0. \quad (26)$$

Обсудим данное наблюдение. Формально формулы (24-25) нельзя применять для описания максимумов, так как нарушается логика рассуждений при их выводе. Но, по-видимому, неоднократное использование разложения в ряд Тейлора с пренебрежением малыми величинами высоких порядков приводит к тому, что формулы учитывают и максимумы отклонения импеданса в приближении (16). Поскольку на практике эти формулы дают правильное описание отклонения импеданса вблизи максимумов не только качественно, но и количественно, что будет видно в дальнейшем по контурным диаграммам, можно не учитывать в качестве условий применимости, что  $|e^{+2i\gamma_0} \pm 1|$  не мало по сравнению с  $|\frac{kd}{\varkappa}|$ .

Проанализируем физический смысл слагаемых в формуле (25). Для этого построим контурные диаграммы для максимального отклонения импеданса (рисунок 8). Здесь и далее на диаграммах пунктирной чёрной линией будут изображены изолинии, вычисленные по точным формулам (14), а сплошной фиолетовой линией – рассчитанные с помощью приближённых выражений – конкретно на данном графике – по формуле (25). Отдельно построены диаграммы для первого слагаемого в (25), для второго, а также для их суммы; рассматривались два варианта покрытий со значениями  $kd = 0,2$  и  $kd = 0,6$ . На диаграммах для суммы слагаемых в формуле (25) ближайшие изолинии чёрного и фиолетового цвета соответствуют одному и тому же значению отклонения импеданса.

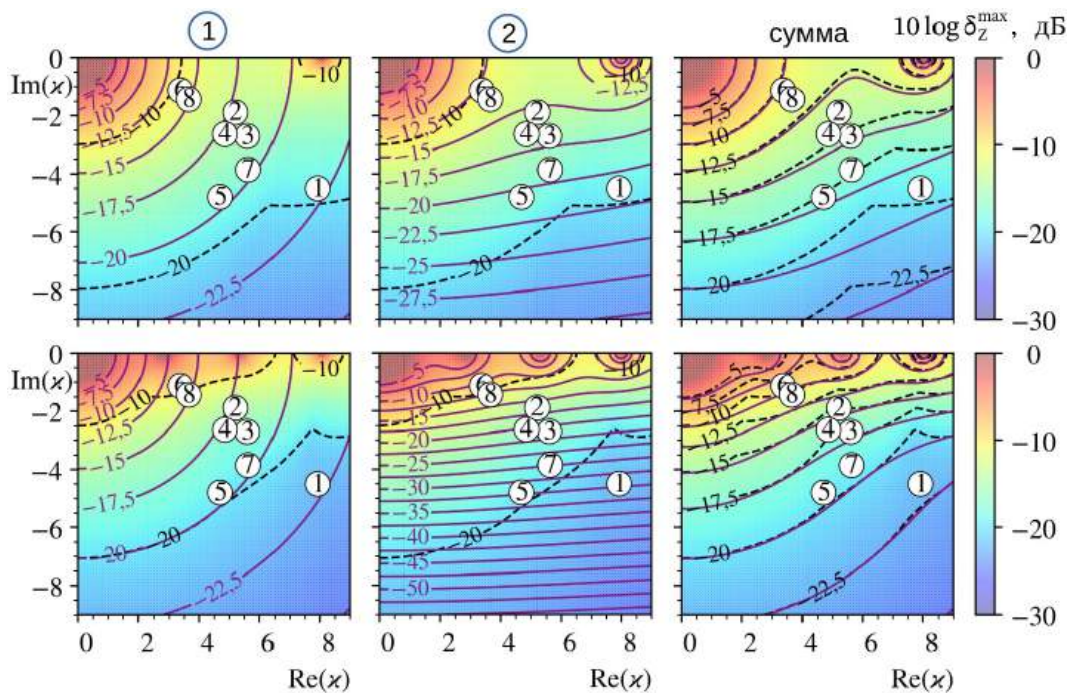


Рисунок 8 – Двумерные контурные диаграммы отклонения поверхностного импеданса покрытия;  $kd = 0,2$  (верхняя строка),  $kd = 0,6$  (нижняя строка). В первом столбце – изолинии для первого слагаемого формулы (25), во втором столбце – для второго, в третьем столбце – для их суммы

По диаграммам (рисунок 8) видно, что изолинии, описываемые первым слагаемым в выражении (25), являются окружностями с центром в начале координат. Поэтому первое слагаемое не описывает максимумы при  $\text{Im}(\varkappa) \approx 0$ . Второе слагаемое описывает эти максимумы, начиная с первого, при этом достаточно точно, и даёт дополнительный вклад в отклонение импеданса вблизи нулевого максимума. Сумма этих слагаемых даёт полную (как правило, не заниженную) оценку отклонения импеданса.

## 4.2. Получение качественного критерия

Разложим в формуле (25) синус в ряд Тейлора  $\sin(2\kappa kd) \approx 2\kappa kd$  и после приведения подобных слагаемых получим первую часть качественного критерия (см. рисунок 7):

$$\delta_Z^{\max} \leq \left| \frac{1}{\kappa^2} \right| < \Delta \Leftrightarrow |\kappa| > \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \quad (27)$$

Из этого критерия следует, что для того, чтобы относительное отклонение импеданса было меньше  $\Delta$ , например,  $\Delta = 0,1$  (тогда относительная ошибка импеданса не будет превышать приблизительно 10%), необходимо, чтобы  $|\kappa| > 1/\sqrt{\Delta} \approx 3,2$ .

Условия применимости данного критерия включают в себя условия, при которых были получены выражения (25), а также условие, возникшее из-за приближения синуса первым членом разложения в ряд Тейлора. В итоге условия применимости примут вид:

$$|\kappa| \gg 1, \quad |kd| \ll \frac{1}{|\kappa|} \ll 1. \quad (28)$$

Проанализируем точность данного критерия. Для этого построим диаграммы (рисунок 9) ошибки импеданса при различных значениях  $kd$ : 0,03; 0,2 и 0,6. Чёрной штриховой линией изображены изолинии, полученные по точным формулам (14), а фиолетовой сплошной линией – с помощью приближённого критерия (27).

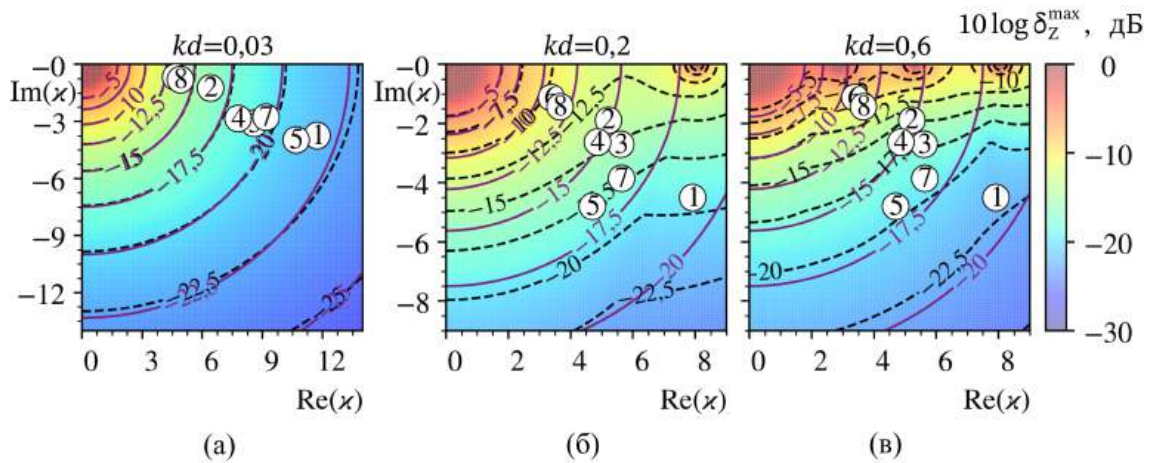


Рисунок 9 – Двумерные контурные диаграммы отклонения импеданса для первой части качественного критерия (формула (27)) при различных значениях  $kd$

По диаграммам видно, что полученный приближённый критерий описывает отклонение импеданса только вблизи нулевого максимума (в начале координат) и не учитывает максимумы, начиная с первого. При малых значениях  $kd$  критерий даёт достаточно точную оценку отклонения импеданса. При больших значениях  $kd$  или  $|\kappa|$  условия применимости критерия (28) начинают нарушаться, и точность критерия уменьшается. Когда значение  $kd$  не мало (рисунки 9б и 9в), и отклонение импеданса определяется только нулевым максимумом (то есть при небольших значениях  $\text{Re}(\kappa)$ ), то по диаграммам видно, что критерий даёт оценку сверху в том смысле, что если по данному критерию ошибка импеданса не превышает заданной величины (например, 10%), то вычисленная по точным формулам ошибка будет ещё меньше. В случае, когда вклад от максимумов, начиная с первого, становится существенным (то есть при небольших значениях  $\text{Im}(\kappa)$  и не малых значениях  $\text{Re}(\kappa)$ ), точность критерия уменьшается, в том числе критерий может давать заниженную оценку.

Получим вторую часть критерия, которая описывает максимумы, начиная с первого. По диаграммам на рисунке 8 видно, что для этого достаточно провести изолинии  $\text{Im}(\kappa) = \text{const}$ , которые учитывают отклонение импеданса только для первого максимума. Такие изолинии будут учитывать и отклонение импеданса в окрестности последующих максимумов, что следует из формул (16) и (25). Рассмотрим малую окрестность вблизи первого максимума, который согласно (16) расположен в точке  $\kappa = \frac{\pi}{2kd}$ . Ранее было показано (рисунок 8), что первое слагаемое в (25) не описывает максимумы, начиная с первого, поэтому этим слагаемым пренебрегаем. Используя разложение синуса в (25) в окрестности первого максимума и предполагая, что  $|\text{Im}(\kappa)| \ll |\kappa|$ , получаем вторую часть качественного критерия:

$$\text{Im}(z) < - \left| \frac{kd}{\pi\Delta} \right|. \quad (29)$$

Условия применимости второй части критерия выглядят следующим образом:

$$|z| \gg 1, \quad \left| \frac{kd}{z} \right| \ll 1, \quad |\text{Im}(z)| \ll |z|. \quad (30)$$

Чтобы проанализировать точность полученной оценки при различных значениях  $kd$ , построим диаграммы отклонения импеданса (рисунок 10). Как и раньше, чёрной штриховой линией изображены изолинии, полученные по точным формулам (14), а фиолетовой сплошной линией – с помощью приближенного критерия (29). По диаграммам видно, что, как и первая часть качественного критерия, вторая часть даёт более точную оценку отклонения импеданса при малых значениях  $kd$ .

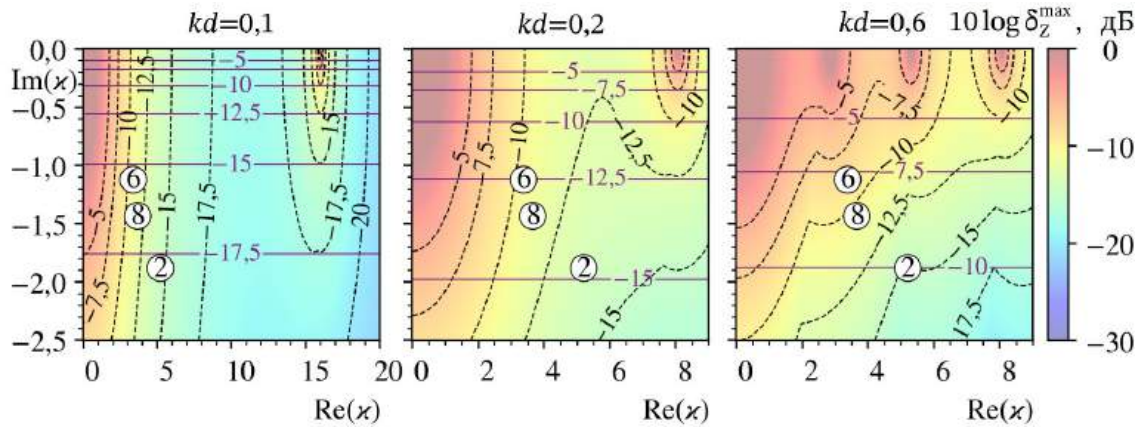


Рисунок 10 – Двумерные контурные диаграммы отклонения импеданса для второй части качественного критерия (формула 29) при различных значениях  $kd$

Приведём окончательные формулы для простого качественного критерия. Одновременно должно выполняться:

$$|z| > \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \quad \text{и} \quad \text{Im}(z) < - \left| \frac{kd}{\pi\Delta} \right|. \quad (31)$$

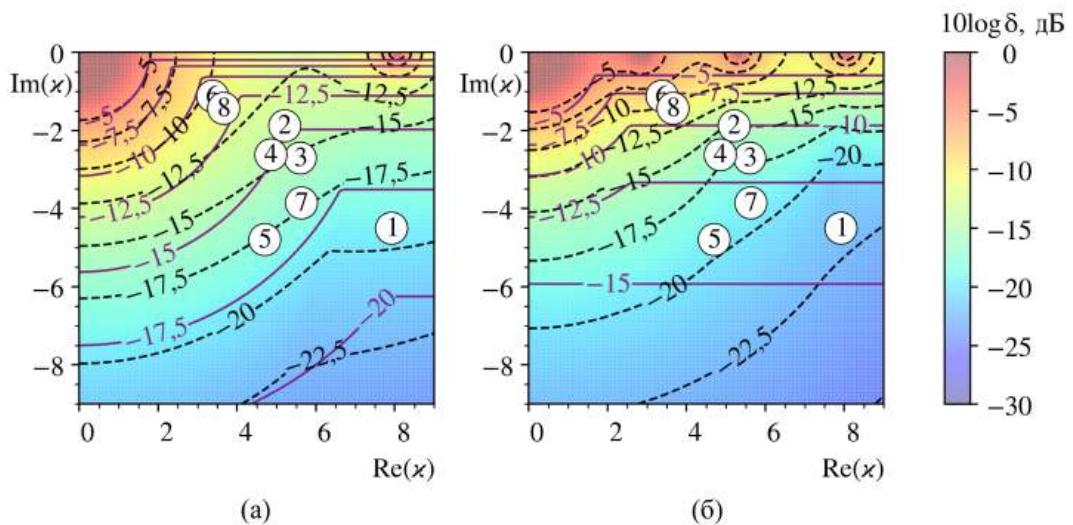


Рисунок 11 – Двумерные контурные диаграммы отклонения импеданса для иллюстрации качественного критерия (формула (31)) при  $kd = 0,2$  (а) и  $kd = 0,6$  (б)

Проиллюстрируем применение данного критерия для двух покрытий с разными значениями  $kd$ , построив диаграммы ошибки импеданса (рисунок 11). Как и раньше, чёрной штриховой линией

изображены изолинии, полученные по точным формулам (14), а фиолетовой сплошной линией – с помощью качественного критерия (31). По диаграммам видно, что качественный критерий даёт лучшую точность при малых значениях  $kd$ . Точность первой части критерия, которая описывает окружности с центром в начале координат, падает при увеличении  $|z|$ , поскольку нарушается условие  $|kd| \ll \frac{1}{|z|}$ , при котором был получен этот критерий. Точность второй части критерия (горизонтальные прямые, отсекающие максимумы) уменьшается при уменьшении мнимой части  $z$  из-за нарушения условия  $|\text{Im}(z)| \ll |z|$ .

Из приведенных диаграмм следует, что в случае нарушения приведенных условий критерий, как правило, даёт оценку сверху, что позволяет применять его для любых магнитоэлектрических покрытий, так как на практике важно получить не столько точное значение ошибки, которую вносит импедансное приближение, сколько оценить её максимальное значение. В этом плане именно оценка сверху имеет важное практическое значение (в отличие, например, от оценки снизу, которая для реальных расчётов смысла не имеет).

## Заключение

В работе рассмотрены вопросы применимости приближения поверхностного импеданса значением, которое не зависит от угла падения волны и её поляризации. На примере двух покрытий одинаковой толщины показано, что такое приближение применимо не всегда, из-за чего может возникать существенная ошибка расчёта коэффициента отражения покрытия или полей рассеяния тел с покрытиями. Предложены критерии применимости приближения постоянного импеданса. Показано, что относительное отклонение импеданса от постоянного значения определяется только двумя параметрами задачи: электрической плотностью  $z = \sqrt{\varepsilon\mu}$  и произведением  $kd$ . Проанализировано поведение функции относительного отклонения импеданса при различных значениях  $z$  и  $kd$ . Показано, что если вдоль толщины покрытия укладывается целое число четвертей длины волны, а покрытие имеет малые потери, то приближение постоянного импеданса неприменимо. Получены приближённые выражения для расчёта относительного отклонения импеданса при  $|z| \gg 1$  и простые формулы для качественного анализа, которые, как правило, дают для относительного отклонения оценку сверху. Выражения позволяют оценить, насколько успешно данный класс покрытий можно моделировать с использованием приближения эквивалентного поверхностного импеданса, не зависящего от угла падения волны и поляризации. Как показали расчёты, покрытия, разрабатываемые и применяемые в ИТПЭ РАН, удовлетворяют полученным критериям, и для расчёта полей рассеяния электрически больших гладких тел с такими покрытиями применение импедансного приближения вполне допустимо, поскольку оно обеспечивает достаточно высокую точность расчётов при значительной экономии вычислительных ресурсов.

## Список литературы

- [1] Кисель В.Н., Федоренко А.И. Разработка электродинамической модели воздухозаборника с элементами входной части двигателя // Излучение и рассеяние электромагнитных волн ИРЭМВ 2001. Материалы Всероссийской научно-технической конференции. Таганрог, Россия, 18-23 июня 2001 г. Таганрог: Радиотехнический ун-т, 2001. С. 25-27.
- [2] Kisel' V.N., Fedorenko A.I. Electromagnetic modeling of the jet aircraft intake with the interior impeller // Conf. Proc. 2002 Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET\*02), Kiev, Ukraine, Sept. 10-13, 2002. V.2. P.508-510. doi: [10.1109/MMET.2002.1106985](https://doi.org/10.1109/MMET.2002.1106985) EDN: [WQVHFD](https://www.edn.net/WQVHFD)
- [3] Lagarkov A.N., Kisel V.N. Electromagnetic Energy Absorption within Extensive Impedance Structures // Electromagnetic materials. Proc. of the Symposium P, ICMAT 2007 (International Conference on Materials for Advanced Technologies, SUNTEC, Singapore, 2007). Edited by Lim Hock, Serguei Matitsine, Gan Yeow Beng and Kong Ling Bing (World Scientific, Singapore, 2007), P. 3 - 10. doi: [10.1142/9789812709547\\_0001](https://doi.org/10.1142/9789812709547_0001)
- [4] Кисель В.Н., Маслов А.С. Способ оптимизации параметров покрытия внутренней поверхности металлической полости // Современная электродинамика. 2025. Т. 3, № 2(16). С. 21-29. doi: [10.24412/2949-0553-2025-216-21-29](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2025-216-21-29) EDN: [EKPMPF](https://www.edn.net/EKPMPF)
- [5] Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.

Ссылка для цитирования:

Кисель В.Н., Маслов А.С. Условия и критерии слабой угловой зависимости поверхностного импеданса однослойного магнетодиэлектрического покрытия // Современная электродинамика. 2025. Т. 4, № 3(17). С. 14-26. DOI 10.24412/2949-0553-2025-317-14-26. EDN XHUNBN.

Citation link:

Kisel V.N., Maslov A.S. Conditions and criteria for weak angular dependence of the surface impedance of a single-layer magnetodielectric coating // Modern Electrodynamics. 2025. Vol. 4, No. 3(17). P. 14-26. DOI 10.24412/2949-0553-2025-317-14-26. EDN XHUNBN.