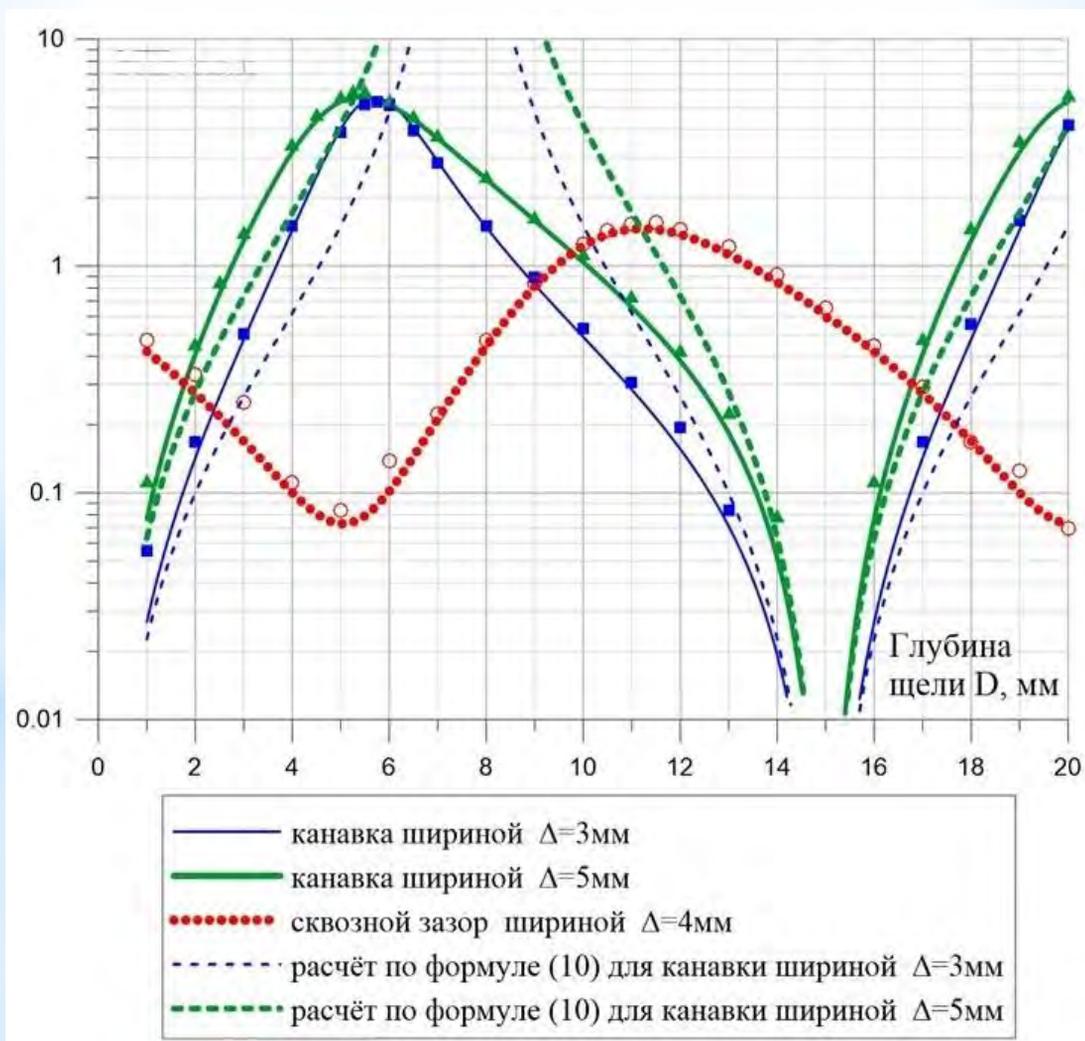




СОВРЕМЕННАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

научный рецензируемый журнал



ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ РАССЕЯНИЯ УЗКИМИ ПОЛЫМИ ЩЕЛЯМИ
ПРИ УЧЁТЕ АДМИТТАНСА ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ

К.М. Басков, И.И. Краснолобов, А.М. Лебедев, В.Н. Семенов, Т.А. Фурманова

декабрь 2023

№ 6 (8)

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической и прикладной электродинамики
Российской академии наук

Журнал основан в 2022 году

Выпуск № 6 (8)

Современная электродинамика

научный рецензируемый журнал

Под редакцией академика РАН А.Н. Лагарькова

Москва, 2023

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук

ISSN 2949-0553

Современная электродинамика

Научный рецензируемый журнал. Издаётся с октября 2022 года.

Выходит один раз в два месяца.

№ 6 (8)

декабрь 2023

Главный редактор академик РАН А.Н.Лагарьков

Редакционная коллегия: к.т.н. Н.П. Балабуха, к.т.н. К.М. Басков, д.ф.-м.н. А.П. Виноградов, д.ф.-м.н. А.А. Дорофеенко, д.ф.-м.н. В.Н. Кисель, к.ф.-м.н. К.И. Кугель, д.ф.-м.н. А.М. Мерзликин, д.ф.-м.н. А.А. Пухов, д.ф.-м.н. А.Л. Рахманов, д.ф.-м.н. А.В. Рожков, д.ф.-м.н. К.Н. Розанов, к.т.н. И.А. Рыжиков, д.ф.-м.н. А.К. Сарычев, к.ф.-м.н. В.С. Солосин

Адрес редакции:

125412, г. Москва, ул. Ижорская, д.13, стр. 6

тел., факс 8 (495) 484-26-33

эл.почта electrodynamics@mail.ru

Зав. редакцией Е.В. Зеневич

Компьютерная вёрстка: Е.В. Зеневич

Свидетельство о регистрации Эл № ФС77-83666 от 26.07.2022 г.

Подписано в печать 22.01.2024. Тираж 30 экз.

© ИТПЭ РАН, 2023

Содержание номера

1 Теоретическая электродинамика	4
Andrianov E.S., Pukhov A.A., Vinogradov A.P., Dorofeenko A.V. NARROWING THE LINEWIDTH OF A PLASMONIC NANOLASER WITH AN INCREASE OF COUPLING BETWEEN A TWO-LEVEL SYSTEM AND A PLASMONIC NANOPARTICLE	4
Пузько Р.С. ОСАЖДЕНИЕ НАНОЧАСТИЦ В БЛИЖНЕМ ПОЛЕ ПОВЕРХНОСТ- НОЙ ВОЛНЫ	12
2 Вычислительная электродинамика	22
Басков К.М., Краснолобов И.И., Лебедев А.М., Семенов В.Н., Фурманова Т.А. ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ РАССЕЯНИЯ УЗКИМИ ПОЛЫМИ ЩЕЛЯМИ ПРИ УЧЁТЕ АДМИТТАНСА ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ	22
3 Методические заметки	38
Виноградов А.П., Пухов А.А. ПЕРЕВОД И КОММЕНТАРИИ СТАТЬИ ПЁРСЕЛЛА «ВЕРОЯТНО- СТИ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА РАДИОЧАСТОТАХ» (E. M. PURCELL. SPONTANEOUS EMISSION PROBABILITIES AT RADIO FREQUENCIES // PHYSICAL REVIEW, 69, 681, (1946)) (МЕТОДИЧЕ- СКАЯ ЗАМЕТКА)	38

NARROWING THE LINEWIDTH OF A PLASMONIC NANOLASER WITH AN INCREASE OF COUPLING BETWEEN A TWO-LEVEL SYSTEM AND A PLASMONIC NANOPARTICLE

E.S. Andrianov^{1,2}, A.A. Pukhov *^{2,3}, A.P. Vinogradov^{1,2,3}, A.V. Dorofeenko^{1,2,3}

¹*Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA), Moscow, Russia*

²*Moscow institutes of physics and technology, Moscow region, Russia*

³*Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics RAS, Moscow, Russia*

Received: 25.12.2023

Accepted: 29.12.2023

Published: 18.01.2024

Abstract

The emission of a plasmonic nanolaser built from a quantized open resonator and atom is studied in the strong quantum regime when the number of excited levels in the resonator is of the order of unity. Due to the comparable size of the atom and resonator we should consider the Purcell factor for both the atom and the resonator. It is shown that the coupling of the open nanoresonator with an atom may decrease the rate of nanolaser radiation and therefore cause narrowing of the resonator linewidth.

Keywords: nanolaser, two-level system, plasmonic nanoparticle, open cavity, Purcell factor

EDN EDQPWF

doi:[10.24412/2949-0553-2023-68-4-11](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2023-68-4-11)

1. Introduction

Due to recent developments of nanoplasmonics one arises a wide range of problems associated with the new methods of spectroscopy (SERS [1, 2], TERS [3, 4], SNOM [5–9]), the creation of nanoscale coherent electromagnetic field sources (dipole nanolasers [10, 11], nanoscale light sources [12–15], spasers [10, 16–19]) and the study of active metamaterials [20–24]. Underlying all these problems is the spontaneous emission of an atom in a complex environment.

The pioneering work of Purcell [25] lays the foundation of investigation of environment influence on atomic spontaneous emission (see [26] and references therein).

In contrast to Fabry-Perot resonance in usual lasers plasmonic systems operate due to plasmonic resonance. In such case the mode volume is determined by the volume of near fields modes and it may be equal several tens of nanometers. Frequently the volume of such resonator is comparable with the volume of quantum system. Thus the anti-symmetrical situation described above (big resonator - small atom) changes. One may consider inverse situation where we have small resonator and big atom. Plasmonic nanostructures may play the role of such small resonator and quantum dot may play the role of big atom. So the well-known and intuitively understandable concept of Purcell factor may be expand and be applied to resonator. Such Purcell factor describes the change of nanoresonator quality and as a consequence its linewidth. In other words there is the problem concerning the influence of intrinsic structure of resonator on its properties. Below we show that two-level quantum system (for example, quantum dot) may decrease the rate of dissipation of open nanoresonator and narrowing of nanoresonator line.

2. The classical analysis of two coupled oscillators

Firstly we consider the problem concerning the interaction of two classical oscillators and introduce classical analogue of Purcell factor.

*pukhov@mail.ru

The dynamics of two interacting oscillators is described by the following system of equations:

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = k(x_2 - x_1), \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\gamma_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = k(x_1 - x_2). \quad (2)$$

Below we will suppose that the oscillator eigenfrequencies are much smaller than other parameters, $\omega_{1,2} \gg \gamma_{1,2}, k^{1/2}$. Introducing the new variables $\tilde{x}_1 = x_1 + i\dot{x}_1/\omega_1$, $\tilde{x}_2 = x_2 + i\dot{x}_2/\omega_2$, $\Omega = k/(\omega_1 + \omega_2)$ we obtain the following system of complex equations:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}_1 = (-i\omega_1 - \gamma_1)\tilde{x}_1 - i\Omega\tilde{x}_2, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}_2 = (-i\omega_2 - \gamma_2)\tilde{x}_2 - i\Omega\tilde{x}_1. \quad (4)$$

We suppose that the oscillator frequencies coincide, $\omega_1 = \omega_2$, but the first one decays much faster than the other, $\gamma_1 \gg \gamma_2, \Omega$. We consider the solution of this system with two initial conditions.

The first one corresponds to the excitation of the low-Q oscillator, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. In this case the dynamics of the first oscillator takes the form:

$$x_1(t) = \frac{\gamma_2 + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(-i\omega + \lambda_1)t - \frac{\gamma_2 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp(-i\omega + \lambda_2)t \quad (5)$$

where $\lambda_{1,2}$ are the roots of the characteristic equation

$$\lambda^2 + \lambda(\gamma_1 + \gamma_2) + \Omega^2 = 0. \quad (6)$$

Under condition $\gamma_1 \gg \gamma_2, \Omega$ we have $\lambda_1 \approx \gamma_1$, and the solution (5) takes the form:

$$x_1(t) \approx \exp(-i\omega - \gamma_1)t, \quad (7)$$

i.e. we have exponential decay with the rate γ_1 . Thus, the dumping rate does not change. This result has clear physical interpretation: high-quality resonator does not influence on the low quality one (of course, if $\gamma_1 \gg \gamma_2, \Omega$).

Now consider the opposite case, when the high quality oscillator is excited at the initial time, i.e. the initial condition $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$. In such case the dynamics of the high-quality oscillator takes the form:

$$x_2(t) \approx \exp(-i\omega - \Omega^2/\gamma_1)t, \quad (8)$$

e.g. we have exponential decay with the rate Ω^2/γ_1 . The ratio of this decay rate to the rate of free decay is

$$P = \Omega^2/\gamma_1\gamma_2, \quad (9)$$

and play the role of classical analogue of the Purcell factor.

This change in the classical case has a very clear interpretation: low-Q oscillator is connected to a high-Q oscillator and causes the change of its decay rate.

So, when two oscillators with different qualities interact with each other the decay rate of high-quality oscillator changes while the decay rate of low-quality oscillator does not change. The above case describes a classical analogue of the change of the relaxation rate of the atom during the transition from free space to the resonator (the ratio of these rates is a Purcell factor). Atom is considered to be a high-Q oscillator, moreover, its internal losses are usually completely neglected and resonator is considered as a low-Q oscillator.

This result remains valid in quantum case too, where the resonator mode plays the role of low-quality oscillator and two-level quantum system plays the role of high-quality oscillator. Here we consider the same limiting case, namely, $\gamma_a \gg \gamma_D, \Omega_R$, where γ_a is the resonator relaxation rate, γ_D is the atom relaxation rate, and Rabi frequency Ω_R describes the strength of their interaction.

We consider the two-level quantum dot (QD) with ground state $|g\rangle$ and excited state $|e\rangle$ with transition being in the resonance with the dipole mode of plasmonic nanoparticle (NP). Population inversion is described by the operator $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, while QD dipole moment is $\hat{\sigma}$. Plasmon electric near-field operator is proportional to plasmon annihilation operator \hat{a} while number of quanta is determined by operator $\hat{a}^+\hat{a}$. Interaction between NP and QD is dipole-dipole one, so $\hat{V} \sim \hbar\Omega_R(\hat{a}^+\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^+\hat{a})$.

When TLS is placed in the closed damped cavity the TLS may excite only modes of this cavity. System of equations describing dynamics of resonator mode interacting with two-level QD in the strong quantum limit when plasmon number being of the order of unity is as follows [27, 28]:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle = -\gamma_a \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle + i\Omega_R \langle \hat{\sigma}^+ a - a^+ \sigma \rangle, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}_z \rangle = -\gamma_D (\langle \hat{\sigma}_z \rangle + 1) - 2i\Omega_R \langle \hat{\sigma}^+ a - a^+ \sigma \rangle, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} i \langle \hat{\sigma}^+ a - a^+ \sigma \rangle = -(\gamma_a + \gamma_D) \langle \hat{\sigma}^+ a - a^+ \sigma \rangle / 2 + \Omega_R \langle \hat{\sigma}_z \rangle + 2\Omega_R \langle \hat{a}^+ \hat{\sigma}_z \hat{a} \rangle + \Omega_R, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}^+ \hat{\sigma}_z \hat{a} \rangle = -(\gamma_a + \gamma_D) \langle \hat{a}^+ \hat{\sigma}_z \hat{a} \rangle - i\Omega_R \langle \hat{\sigma}^+ \hat{a} - \hat{a}^+ \hat{\sigma} \rangle. \quad (13)$$

Now, we consider the QD's behavior in empty cavity (e.g. the number of quanta is zero). For this purpose we choose the following initial conditions $\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle_{t=0} = \langle \hat{a}^+ \hat{\sigma}_z \hat{a} \rangle_{t=0} = \langle \hat{\sigma}^+ a - \hat{a}^+ \hat{\sigma} \rangle_{t=0} = 0$, $\langle D \rangle_{t=0} = 1$. We are interested in spontaneous emission of QD population inversion to cavity mode. Solving equations (10) - (13) by Laplace transform we obtain:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle = & -1 + \frac{4 \exp(-(\gamma_a + \gamma_D)t)}{(\gamma_a - \gamma_D)^2 - 16\Omega_R^2} \left\{ - (4\Omega_R^2 + \gamma_a \gamma_D) + \right. \\ & + \left((\gamma_a + \gamma_D)^2 / 4 - 2(\Omega_R^2 + \gamma_a \gamma_D / 4) + (\gamma_a + \gamma_D) \sqrt{(\gamma_a - \gamma_D)^2 - 16\Omega_R^2 / 4} \right) \times \\ & \times \exp \left(\sqrt{(\gamma_a - \gamma_D)^2 - 16\Omega_R^2} t / 2 \right) + \\ & + \left((\gamma_a + \gamma_D)^2 / 4 - 2(\Omega_R^2 + \gamma_a \gamma_D / 4) - (\gamma_a + \gamma_D) \sqrt{(\gamma_a - \gamma_D)^2 - 16\Omega_R^2 / 4} \right) \times \\ & \left. \times \exp \left(-\sqrt{(\gamma_a - \gamma_D)^2 - 16\Omega_R^2} t / 2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

In this case under condition $\gamma_a \gg 2\Omega_R \gg \gamma_D$ decreasing of population inversion in the case of may be written as

$$\langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle = -1 + \exp \left(- (4\Omega_R^2 + \gamma_a \gamma_D) t / (\gamma_a + \gamma_D) \right), \quad (15)$$

e.g. atom exponentially decay with the rate

$$\gamma_D^{tot} = (4\Omega_R^2 + \gamma_a \gamma_D) / (\gamma_a + \gamma_D), \quad (16)$$

(in the cases of $\gamma_a \gg \gamma_D \gg 2\Omega_R$ or $\gamma_D \gg \gamma_a$ atom exponentially decay with the rate γ_D). Wherein increasing of the atomic decay rate connects with additional joule losses in resonator due to excitation of resonator mode. Then the Purcell factor may be defined as the ration of the line width of TLS placed in resonator to the one of the TLS placed in free space

$$P_D = \frac{4\Omega_R^2 + \gamma_a \gamma_D}{(\gamma_a + \gamma_D) \gamma_D}, \quad (17)$$

that in the limit $\gamma_a \gg 2\Omega_R \gg \gamma_D$ gives

$$P_D = \frac{4\Omega_R^2}{\gamma_a \gamma_D}, \quad (18)$$

where factor 4 arises due to in quantum case we choose dissipation rate for energy variables.

3. Effective change of the resonator quality factor in the presence of a two-level system. Purcell factor of the resonator

As shown in the previous section, interaction of two oscillators may significantly change the relaxation rate of only high-Q one. Characteristic value of relaxation rates of open nanoresonators is the order of $\gamma_a \sim 10^{12} - 10^{14} s^{-1}$ while for quantum dots this value is the order of $\gamma_D \sim 10^9 - 10^{12} s^{-1}$. So, open nanoresonator has always smaller quality factor than quantum system and it would be seem that it is not possible to change its relaxation.

Note that in the open nanoresonator losses consist of radiative (connecting with excitation of free space modes) and non-radiative (connecting with thermal losses) ones. Excitation of near field mode (in subsequent consideration only dipole mode) is not considered as source of non-radiative losses because this

mode excitation is of interest. Thus, $\gamma_a = \gamma_a^{rad} + \gamma_a^{nonrad}$ and we can write the equation of energy relaxation in the form of

$$\frac{dW}{dt} = -\gamma_a W = -(\gamma_a^{rad} + \gamma_a^{nonrad}) W, \quad (19)$$

which yields

$$W(t) = W_0 \exp(-(\gamma_a^{nonrad} + \gamma_a^{rad}) t). \quad (20)$$

Here W_0 is the initial energy in the resonator. Then intensity of losses is equal to

$$I(t) = \frac{dW}{dt} = (\gamma_a^{rad} W_0 + \gamma_a^{nonrad} W) \exp(-(\gamma_a^{nonrad} + \gamma_a^{rad}) t) = I_{rad}(t) + I_{nonrad}(t), \quad (21)$$

where $I_{rad}(t) = \gamma_a^{rad} W_0 \exp(-(\gamma_a^{rad} + \gamma_a^{nonrad}) t)$ is the intensity of irradiation into free space and $I_{nonrad}(t) = \gamma_a^{nonrad} W_0 \exp(-(\gamma_a^{rad} + \gamma_a^{nonrad}) t)$ is the intensity of non-radiative losses.

Thus the time dependence of radiation intensity is determined by the total rate of dissipation $\gamma_a^{rad} + \gamma_a^{nonrad}$, but the amplitude is determined by the radiation rate only, $I_{rad} \sim \gamma_a^{rad}$.

Now we return to the question about the change of nanoresonator decay rate. As has been noted it has smaller quality factor than quantum system one. Taking into account the fact that rate of nanoresonator dissipation consists of radiative and non-radiative losses we may write $\gamma_a^{rad} + \gamma_a^{nonrad} \gg \gamma_D$. When nanoresonator and quantum system approach to each other the rate of non-radiative decay in nanoresonator does not change because it depends on its material properties. At the same time the radiation rate γ_a^{rad} may significantly change due to changing of geometric structure of surrounding space, because the size of quantum system is comparable with the size of nanoresonator. Most significantly this change may occur for specific type of nanoresonators for which $\gamma_a^{rad} \gg \gamma_a^{nonrad}$, e.g. for "large" ($r \geq 30nm$) metallic nanoprticle or dielectric particle with whispering gallery mode. New rate of radiation $\tilde{\gamma}_a^{rad}$ may be much smaller than the old one γ_a^{rad} . So, the total relaxation rate of nanoresonator may become much smaller than the relaxation rate of quantum dote $\gamma_D \gg \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_a^{nonrad}$. Thus nanoresonator becomes the oscillator with high quality factor in comparison with the quantum dot and it is possible to change the resonator decay rate (for this it is necessary to satisfy the inequality $\gamma_a^{rad} \gg \gamma_D \gg \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_a^{nonrad}$).

We now estimate how the rate of nanoresonator radiative losses may change in the presence of the quantum dot. Assume that there are several quantum dots where the main losses are nonradiative which around nanoresonator. We also assume that the size of nanoparticles and quantum dots is much smaller than the wavelength, $r \ll \lambda$. Then the absorption cross section of one quantum dot is $\sim \lambda^2$. We assume that the quantum dots surround nanoresonator, so we actually have "absorbing" cylinder around it with haracteristic height $\sim \lambda$ and size of base is $\sim r$. Nanoresonator can irradiate just through these bases. In the case of absence of quantum dots it radiated into the solid angle 4π , now it will radiate into the solid angle $\sim (r/\lambda)^2$. Since the radiation rate of nanoresonator is determined by integrating the Poynting vector over the surface through which it emits, we can estimate the change in the rate of radiation as $\tilde{\gamma}_a^{rad}/\gamma_a^{rad} \sim (r/\lambda)^2$. Since the characteristic size of the quantum dots and nanoresonator $\sim 50nm$, and wavelength $\sim 500nm$, we obtain the change in the rate of radiation by two orders.

This makes it possible to satisfy the inequality $\gamma_a^{rad} \gg \gamma_D \gg \tilde{\gamma}_a^{rad}$. For example, for semiconductor quantum dots $\gamma_D \sim 10^{11} s^{-1}$, characteristic radiative loss dielectric microsphere is $\gamma_a^{rad} \sim 10^{12} s^{-1}$, then $\tilde{\gamma}_a^{rad} \sim (r/\lambda)^2 \gamma_a^{rad} \sim 10^{10} s^{-1}$ and we have $\gamma_a^{rad} \gg \gamma_D \gg \tilde{\gamma}_a^{rad}$. These estimates show that the change in the Q factor of open resonator may be achievable in the experiment.

Now we return to the problem concerning the change of the open nanoresonator relaxation rate near quantum dot. The dynamics of their interaction is described by the system (4) - (7), but as an initial condition we assume the following. Let the atom at the initial time be in the ground state, and the cavity mode has a single quantum of energy (plasmon). We are interested in the decay rate of the resonator mode in this case. Dynamics as before is described by equations (4) - (7), but in this situation we choice the following initial condition $\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle_{t=0} = 1$, $\langle D \rangle_{t=0} = -1$, $\langle \hat{\sigma}^+ a - \hat{a}^+ \hat{\sigma} \rangle_{t=0} = 0$. Also, we shall assume that at the initial time two-level system and cavity mode uncorrelated, so $\langle \hat{a}^+ \hat{\sigma}_z \hat{a} \rangle = \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle \langle \hat{\sigma}_z \rangle = -1$. Then the dependence of number of plasmon on the time take the form:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle_t &= \frac{\exp(-\tau/2)}{\Gamma^2(1-16\Gamma^2)} \{ (\Gamma^2 + 8\alpha^2\Gamma^2 - 16\Gamma^4) \cosh(\sqrt{1-16\Gamma^2}\tau/2) + \\ &+ (2\Gamma^2\delta - \Gamma^2) \sqrt{1-16\Gamma^2} \sinh(\sqrt{1-16\Gamma^2}\tau/2) - 8\alpha^2\Gamma^2 \}, \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$\alpha = \Omega_R / (\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_D),$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\Omega_R^2}{(\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_D)^2} + \frac{(\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad}) \gamma_D}{4(\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_D)^2}},$$

$$\delta = \gamma_D / (\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_D),$$

$$\tau = (\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_D) t.$$

In the weak-coupling regime $|\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} - \gamma_D| \gg 4\Omega_R$ under condition $\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} \ll \gamma_D$ the time dependence of the plasmon number is following:

$$\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle_t = \exp(- (4\Omega_R^2 + (\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad}) \gamma_D) t / (\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_D)). \quad (23)$$

with the rate

$$\gamma_a^{tot} = (4\Omega_R^2 + (\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad}) \gamma_D^{nonrad}) / (\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_D^{nonrad}). \quad (24)$$

These expressions have the very important consequence. They are absolutely analogous to the equation (9) - (10) for population inversion damping. It means that we can introduce the Purcell factor for cavity mode. As for atom it describes the change of resonator damping, or quality factor, in the presence of two-level system.

The ratio of rates of cavity mode decay in the presence of a two-level system and without it in the limit $\gamma_a \gg 2\Omega_R \gg \gamma_D$ is described by the following equation

$$P_a = \frac{(4\Omega_R^2 + (\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad}) \gamma_D)}{(\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_D^{nonrad}) (\gamma_a^{nonrad} + \gamma_a^{rad})}, \quad (25)$$

and in the limit $\gamma_a \gg 2\Omega_R \gg \gamma_D$ we obtain

$$P_a = \frac{(4\Omega_R^2 + (\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad}) \gamma_D)}{(\gamma_a^{nonrad} + \tilde{\gamma}_a^{rad} + \gamma_D^{nonrad}) (\gamma_a^{nonrad} + \gamma_a^{rad})}. \quad (26)$$

It should be noted that the decrease in the rate of radiation leads to a decrease in the intensity of radiation because of $\tilde{I}_{rad} \sim \tilde{\gamma}_a^{rad} \ll I_{rad} \sim \gamma_a^{rad}$. However, it is important that there is a significant narrowing of the line in $P_a \approx 4\Omega_R^2 / \gamma_a^{rad} \gamma_D^{nonrad}$ times, that makes nanoresonator having larger quality factor, though with less radiative intensity.

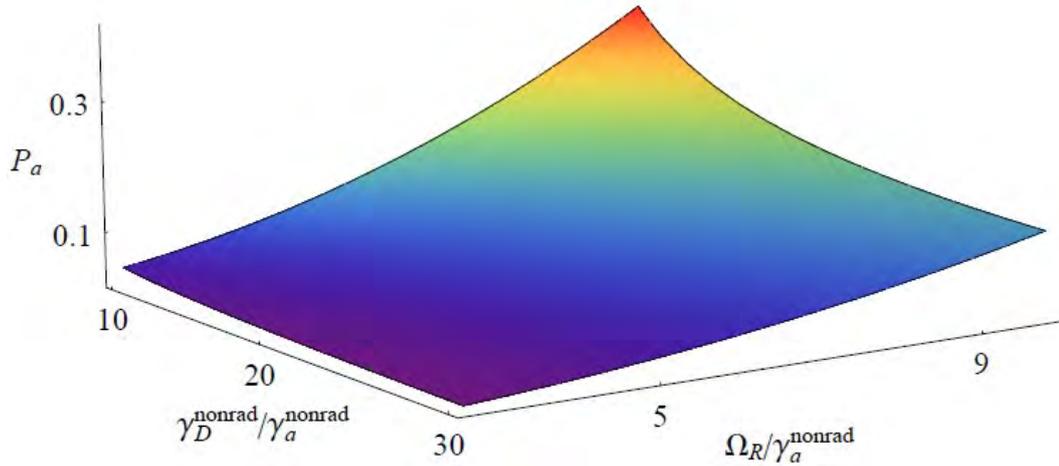


Fig. 1 – (Color online) The dependence of the nanoresonator Purcell Factor P_a on the on the Rabi frequency Ω_R and nonradiative decay rate of the TLS γ_a^{nonrad} for fixed values of radiative and nonradiative nanoresonator decay rates, $\gamma_a^{rad} = 10^{13} s^{-1}$, $\gamma_a^{nonrad} = 10^{13} s^{-1}$. The values of Ω_R and γ_a^{nonrad} are chosen such that the condition $\gamma_D \gg 2\Omega_R \gg \gamma_a$ is satisfied

Thus, for the resonator we can apply the same arguments as for the two-level system. Changing the environment (in other words - the local density of states) leads to an effective change in the quality factor of the resonator. As shown previously for the two-level system, if heat losses are dominated in the cavity damping, the decay rate will be determined only by them. However, if the main part of the losses is associated with the radiation of the open resonator in the free space (for example, the resonator on the whispering gallery mode of dielectric sphere or plasmonic modes on large nanoparticles), the decay rate will be significantly changed. In this case, change of the channel of the dissipation of energy takes place and the main part of dissipation corresponds to the exciting of two-level system.

4. Discussion

We now discuss the physical meaning of obtained results. As shown in the previous section, quality factor of open nanoresonator changes significantly in the presence of a two-level system in the case when the main part of the energy dissipation corresponds to radiation. This effect is closely related to the Purcell effect for two-level atom, but in this case it takes place for the open resonator.

It is well known that the linewidth is determined by the quality factor of open resonator. Using the above calculations, we can estimate the characteristic change in the resonator linewidth as $4\Omega_R^2/\gamma_D\gamma_a^{rad}$. Depending on properties of the two-level system and the distance to it, this value can be greater or smaller than unity. Here, however, we need to take into account the following.

Expression $4\Omega_R^2/\gamma_D\gamma_a^{rad}$ tends to zero as the distance between the open nanoresonator and the two-level system goes to infinity. Of course, this is not valid. The fact is that everywhere we assume that nanoresonator interacts only with the two-level system by the near field. However, it also interacts with the modes of free space. When the two-level system is placed in the nanoresonator near field, this interaction is small compared to the near-field interaction between them, and equation (12) is valid. By increasing the distance between the two-level system and nanoresonator radiation to the modes of free space begins to dominate, and the rate of damping tends to γ_a^{rad} .

Thus, there are two competing processes: radiation into free space with the rate γ_a^{rad} and excitation of the two-level system with the finite lifetime and the damping associated with this process with the rate $4\Omega_R^2/\gamma_D$. As the distance between the open nanoresonator and two-level system will increase the rate of damping tends to γ_a^{rad} . The value $4\Omega_R^2/\gamma_D$ can be either greater or less than radiation into free space mode γ_a^{rad} .

It should be noted that linewidth of the nanolaser radiated field is very important for its operation. In the case of coupling with the dipole mode of a two-level system, an open cavity will radiate, but now with the rate $4\Omega_R^2/\gamma_D$. This enables to efficiently narrow linewidth of nanolaser operating in pulse mode.

5. Conclusions

The paper considers the Q factor of an open plasmonic resonator in the limit of small number of excited plasmons in it. It is shown that the Q factor is essentially determined by discrete nature of the energy excitations of the cavity. Practically, if the number of excited level in the resonator is of the order of unity it becomes a boson two-level system. Despite the difference statistics of quanta in electronical TLS and in plasmonic cavity, it is possible to introduce a Purcell factor of the open plasmonic resonator cavity can also be defined, showing the change of the resonator Q-factor due to changing of environment.

It is shown that in the case where the thermal cavity losses are small, the presence of QD may reduce the rate of decay of the excited mode resonator on several orders. This is due to the fact that most of the energy stored in the cavity will go to the excitation of the QD. This phenomenon may be important, for example, to narrow nanolaser linewidth.

On the other hand, the rate of decay of the excited state of QD increases with rapprochement plasmonic nanoparticle to it. However, this may prove to be uncritical, as is now being discussed in the literature because the main radiative mechanism of nanolaser is nanoparticle luminescence.

The authors thank Yu. E. Lozovik for a helpful discussion.

Список литературы

- [1] Surface-Enhanced Raman Scattering /Ed. by Kneipp K., Moskovits M., Kneipp H. Dordrecht: Springer, 2006.
- [2] Surface Enhanced Raman Spectroscopy: analytical, biophysical and life science applications /Ed. by Schlucker S. Weinheim: Wiley, 2011.
- [3] Pettinger B., Ren B., Picardi G., et al. // Physical review letters. 2004. V. 92. N. 9. P. 207412.
- [4] Bailo E., Deckert V. // Chemical Society Reviews. 2008. V. 37. N. 5. P. 921.
- [5] Deckert V., Zeisel D., Zenobi R., Vo-Dinh T. // Analytical Chemistry. 1998. V. 70. N. 13. P. 2646.
- [6] Heinzlmann H., Pohl D. W. // Applied Physics a-Materials Science & Processing. 1994. V. 59. N. 2. P. 89.

- [7] Keilmann F., Hillenbrand R. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series a-Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2004. V. 362. N. 787. P. 1817.
- [8] Koglin J., Fischer U. C., Fuchs H. // Physical Review B. 1997. V. 55. N. 12. P. 7977.
- [9] Webster S., Batchelder D. N., Smith D. A. // Applied Physics Letters. 1998. V. 72. N. 12. P. 1478.
- [10] Protsenko I. E., Uskov A. V., Zaimidoroga O. A., et al. // Phys. Rev. A. 2005. V. 71. N. 6. P. 063812.
- [11] Protsenko I. E. // Phys. Usp. 2012. V. 55. N. 1. P. 1040.
- [12] Berndt R., Gimzewski J. K., Johansson P. // Physical review letters. 1991. V. 67. N. 27. P. 3796.
- [13] Blackie E. J., Le Ru E. C., Etchegoin P. G. // Journal of the American Chemical Society. 2009. V. 131. N. 40. P. 14466.
- [14] Blackie E. J., Le Ru E. C., Meyer M., Etchegoin P. G. // J. Phys. Chem. 2007. V. 111. N. 3. P. 13794.
- [15] Lu Y.-J., Kim J., Chen H.-Y., et al. // Science. 2012. V. 337. N. 3. P. 6093.
- [16] Andrianov E. S., Pukhov A. A., Dorofeenko A. V., et al. // Phys. Rev. B. 2012. V. 85. N. 1. P. 035405.
- [17] Bergman D. J., Stockman M. I. // Physical review letters. 2003. V. 90. N. 2. P. 027402.
- [18] Noginov M. A., Zhu G., Belgrave A. M., et al. // Nature. 2009. V. 460. N. 7259. P. 1110.
- [19] Vinogradov A. P., Andrianov E. S., Pukhov A. A., et al. // Phys. Usp. 2012. V. 55. N. 3. P. 1046.
- [20] Andrianov E. S., Baranov D. G., Pukhov A. A., et al. // ArXiv cond-mat/1209.0422. 2012.
- [21] Pendry J. B., Maier S. A. // Physical review letters. 2011. V. 107. N. 12. P. 259703.
- [22] Stockman M. I. // Physical review letters. 2011. V. 106. N. 4. P. 156802.
- [23] Stockman M. I. // Physical review letters. 2011. V. 107. N. 5. P. 259704.
- [24] Wuestner S., Pusch A., Tsakmakidis K. L., et al. // Physical review letters. 2010. V. 105. N. 12. P. 127401.
- [25] Purcell E. M. // Physical Review. 1946. V. 69. N. 11-12. P. 681.
- [26] Oraevskii A. N. // Phys. Usp. 1994. V. 37. N. 4. P. 393.
- [27] Scully M. O., Zubairy M. S. Quantum Optics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [28] Sachdev S. // Phys. Rev. A. 1984. V. 29. N. 5. P. 2627.

СУЖЕНИЕ ШИРИНЫ ЛИНИИ ПЛАЗМОННОГО НАНОЛАЗЕРА ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ПЛАЗМОННОЙ НАНОЧАСТИЦЕЙ

Е.С. Андрианов^{1,2}, А.А. Пухов^{2,3*}, А.П. Виноградов^{1,2,3}, А.В. Дорофеев^{1,2,3},

¹ ВНИИА им Н.Л. Духова, Москва, Россия

² Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»,
Москва, Россия

³ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и
прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

* pukhov@mail.ru

Аннотация

Исследовано излучение плазмонного нанолазера, состоящего из квантованного открытого резонатора и атома в сильно квантовом режиме, когда число возбужденных уровней в резонаторе порядка единицы. Ввиду сопоставимости размеров атома и резонатора следует учитывать фактор Парселла как для атома, так и для резонатора. Показано, что взаимодействие открытого нанорезонатора с атомом может уменьшить скорость излучения нанолазера и, следовательно, вызвать сужение ширины линии резонатора.

Ключевые слова: нанолазер, двухуровневая система, плазмонная наночастица, открытый резонатор, фактор Парселла

ОСАЖДЕНИЕ НАНОЧАСТИЦ В БЛИЖНЕМ ПОЛЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ

Р.С. Пузько. * ¹

¹ *Федеральное государственное унитарное предприятие “Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова”, Москва, Россия*

Статья поступила в редакцию 20.12.2023

Одобрена после рецензирования 26.12.2023

Принята к публикации 18.01.2024

Аннотация

В работе рассмотрено осаждение частиц в поле поверхностной волны, возбуждаемой в полностью диэлектрической структуре. Исследована работа оптической ловушки для небольших по сравнению с длиной волны диэлектрических частиц. Продемонстрирован принцип самоиндуцируемой оптической ловушки.

Ключевые слова: оптические пинцеты, поверхностная волна, фотонный кристалл

EDN FDRJMM

doi:[10.24412/2949-0553-2023-68-12-21](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2023-68-12-21)

Введение

Современные биосенсоры позволяют проводить молекулярный анализ образцов [1, 2], что особенно важно для диагностики заболеваний на ранних стадиях, а также для определения сродства химических соединений, активности антител в отношении специфических агентов и т.д. Ключевыми проблемами при анализе образцов становятся время выполнения, стоимость, аппаратная сложность и необходимая высокая чувствительность. Оптические биосенсоры позволяют уменьшить время выполнения анализа, а также обладают высокой чувствительностью, т.е. способны детектировать малые концентрации исследуемых веществ. Оптические биосенсоры, как правило, работают на трех явлениях: люминесценции, рамановском рассеянии [2, 3] и резонансах наноструктур, чувствительных к изменению диэлектрической проницаемости [4].

В рамановских сенсорах исследуется спектр рамановского рассеяния от образца, определяемый энергетическими уровнями исследуемых молекул. По наличию в спектре характерных особенностей можно сделать вывод о химическом составе образца.

Высокая чувствительность резонансных оптических биосенсоров основана на влиянии диэлектрической проницаемости на характеристики оптически резонансной структуры [5]. Чувствительным элементом такого сенсора является оптический резонатор. Спектр коэффициента отражения (прохождения) этой структуры имеет отчетливый максимум/минимум, связанный с возбуждением моды. Характерным представителем такого сенсора является сенсор *Viasoge* [5], основанный на явлении поверхностного плазмонного резонанса. На поверхности сенсора присутствуют молекулы определенного вещества (лиганда). В среду над поверхностью сенсора закачивается жидкость, содержащая молекулы другого вещества, – аналита. При наличии взаимодействия между лигандом и аналитом образуются химические связи, за счет которых на поверхности сенсора удерживаются молекулы аналита. Таким образом, диэлектрическая проницаемость среды над поверхностью сенсора изменяется, а резонансный спектр отражения смещается. В оптических биосенсорах может использоваться также поверхностная волна на границе фотонного кристалла [6].

Важно отметить, что время работы сенсоров типа *Viasoge* опирается на скорость образования химических связей лиганда – аналита. При этом в реакции участвуют только молекулы, находящиеся в

* Автор, ответственный за переписку: Роман Сергеевич Пузько, roman998@mail.ru

непосредственной близости с поверхностью сенсора, что увеличивает время осаждения молекул на поверхность и замедляет работу сенсора. Однако электромагнитное поле поверхностной волны используется и в ближнепольных оптических пинцетах для манипуляции частицами [7]. Это открывает возможности для ускорения работы биосенсоров с помощью пондеромоторных сил в электромагнитном поле.

Принцип работы оптических пинцетов предложен в [8]. Оптические пинцеты позволяют оперировать с биологическими объектами, такими как клетки или бактерии. С помощью оптических пинцетов становится возможным удержание клеток в оптической ловушке для изучения ее свойств, сортировка клеток по их оптическим свойствам. В основе работы оптического пинцета лежит взаимодействие индуцированного дипольного момента частицы с электрическим полем. В результате этого взаимодействия частица затягивается в пучность электромагнитного поля. Сила, действующая на частицу, пропорциональна поляризуемости α . В свою очередь, поляризуемость степенным образом зависит от размеров R частицы $\alpha \sim R^3$. Поэтому с уменьшением размера частиц действующая сила становится меньше, а манипулирование частицей – сложнее. Из-за этого долгое время не удавалось использовать оптические пинцеты для управления нанометровыми объектами [9]. Для улучшения разрешения оптических пинцетов было предложено два подхода: использовать плазмонные частицы, испытывающие резонансный отклик, или использовать плазмонные структуры для создания большой величины ближнего поля [10]. Эти методики позволили оперировать с частицами, имеющими размер от нескольких сотен нанометров до десятков нанометров [7, 11, 12].

В данной работе рассмотрены две независимые проблемы. С одной стороны, это вопрос об уменьшении времени осаждения детектируемых тел в резонансных оптических биосенсорах за счет пондеромоторных сил. А с другой стороны – исследование эффективности ближнепольных оптических пинцетов для манипулирования наночастицами.

Сенсор на основе блоховской поверхностной волны

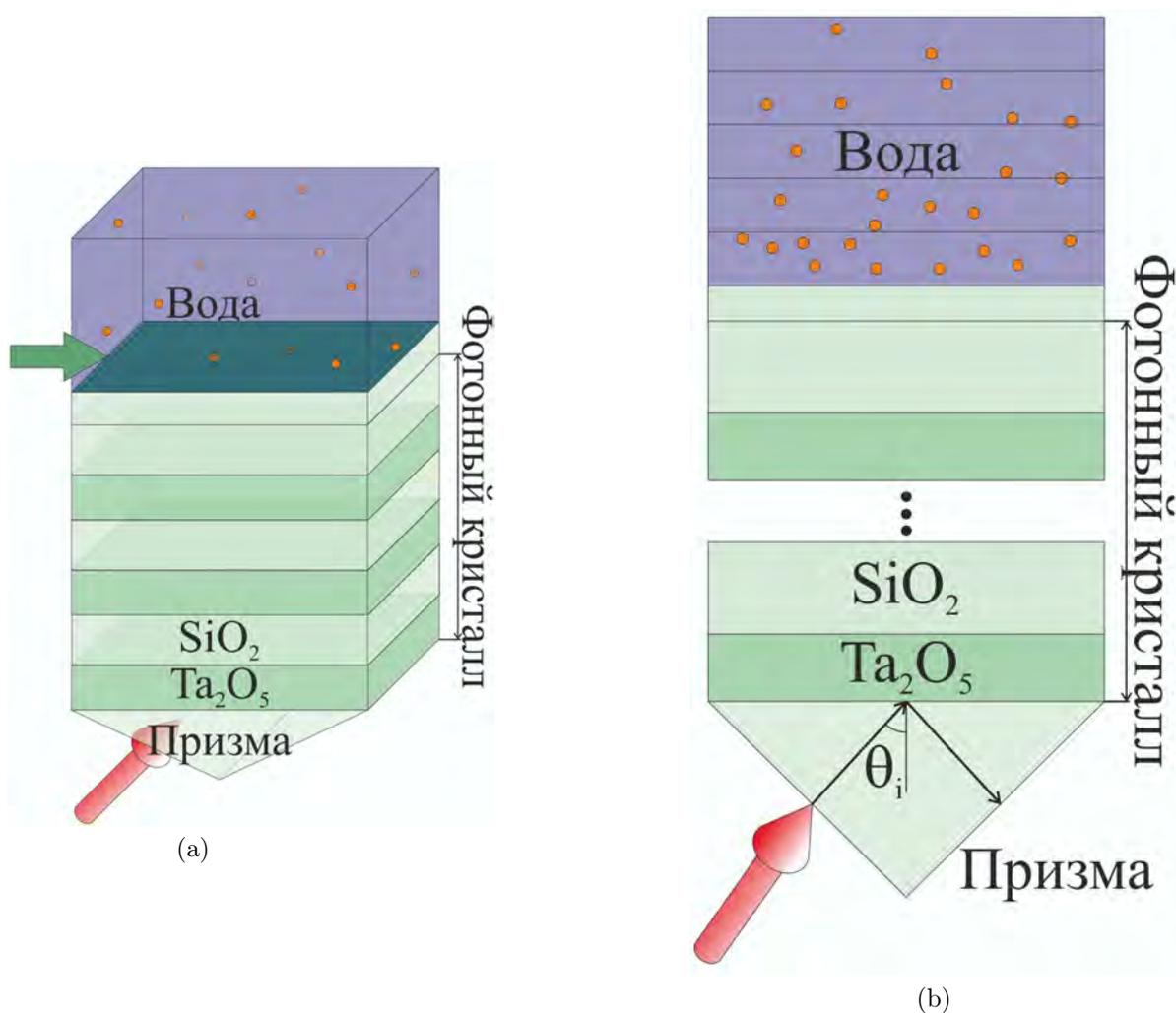


Рисунок 1 – Схема исследуемой слоистой структуры сенсора

В работе рассматривается движение частиц в поле блоховской поверхностной волны (БПВ), возбуждаемой на границе фотонного кристалла [13] (см. рис. 1). Поле БПВ локализовано на границе раздела фотонного кристалла и однородной среды и экспоненциально убывает при удалении от этой границы. На частицу в электромагнитном поле действует пондеромоторная сила [14], втягивающая частицу в пучность электромагнитного поля, если ее показатель преломления больше показателя преломления среды. Экспоненциальное затухание БПВ приводит к возникновению силы, притягивающей частицы, взвешенные в среде над фотонным кристаллом, к максимуму поля БПВ.

Значительной проблемой для манипуляции частицами в электромагнитном поле является броуновское движение частиц [15]. Броуновское смещение отклоняет частицу относительно пучности поля. В результате частица может покинуть оптическую ловушку. Поэтому эффективная жесткость оптической ловушки должна быть достаточно большой для удержания частицы. Особенно остро проблема броуновского движения проявляется для небольших частиц, обладающих большим коэффициентом диффузии и малой величиной поляризуемости.

В данной работе мы будем рассматривать движение частиц в поле БПВ. Для решения задачи, с одной стороны, необходимо знать имеющееся распределение поля, а с другой стороны, – рассматривать динамику движения частиц. Эффективно задача разделяется на две части – расчет электромагнитной задачи и расчет движения частиц. Однако стоит отметить, что положение частиц в системе влияет и на распределение электромагнитного поля. Именно этот факт и лежит в основе работы биосенсоров, использующих явление поверхностного плазмонного резонанса [1]. Поэтому важной деталью работы является решение самосогласованной задачи: на каждой временной итерации численных расчетов последовательно выполняются два шага. На первом шаге осуществляется расчет распределения электромагнитного поля в структуре с учетом влияния пространственного распределения частиц. А затем решается задача динамики частиц.

Динамика частицы

Динамика частиц в гидродинамическом пределе подчиняется уравнению Ланжевена

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}_p(t, \mathbf{x}) + \mathbf{F}_{Br}(t), \quad (1)$$

где m – масса частицы, B – подвижность частицы в жидкости, $\mathbf{F}_p(t, \mathbf{x})$ – сила, действующая на частицу со стороны электромагнитного поля, а $\mathbf{F}_{Br}(t)$ – случайная сила, моделирующая броуновское движение. В расчетах будем пренебрегать агрегацией частиц.

Первое слагаемое (1) описывает силу вязкого трения. Подвижность B сферической частицы зависит от динамической вязкости жидкости η и радиуса частицы r следующим образом: $B = \frac{1}{6\pi\eta r}$.

Второе слагаемое $\mathbf{F}_p(t, \mathbf{x})$ – пондеромоторная сила, действующая на частицу со стороны поля БПВ. Выделим две компоненты этой силы. Первая компонента направлена вдоль плоскости фотонного кристалла и связана с импульсом, переносимым БПВ. Однако мы сконцентрируемся на другой компоненте силы, связанной с экспоненциальным затуханием волны вдоль оси z . Эта компонента подтягивает частицу к границе фотонного кристалла, где находится максимум поля. Ее величина в дипольном приближении составляет [14]:

$$F_{p,z}(t, x) = \frac{1}{2}Re \left[\alpha \left(\vec{E}, \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}^* \right) \right], \quad (2)$$

где \vec{E} – электрическое поле, а α – поляризуемость частицы в среде. В случае сферической частицы:

$$\alpha = r^3 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}, \quad (3)$$

где ε_i и ε_e – диэлектрические проницаемости частицы и среды соответственно.

Фактически броуновский член $\mathbf{F}_{Br}(t)$ изменяется с характерным временем порядка времени свободного пробега броуновской частицы. Этот временной интервал оказывается значительно меньше остальных временных параметров системы. Это позволяет рассматривать $\mathbf{F}_{Br}(t)$ в качестве дельта-коррелированного случайного процесса:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_{Br}(t) \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{F}_{Br}(t_1) \mathbf{F}_{Br}(t_2) \rangle &= b\delta(t_1 - t_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $b = 2k_B T/B$.

Уравнение (1) можно проинтегрировать по времени (здесь и далее будем рассматривать только компоненты вдоль оси z):

$$v(t_1) = v(0)e^{-\frac{t_1}{Bm}} + BF_{p,z}(0, x(0)) \left(1 - e^{-\frac{t_1}{Bm}}\right) + \frac{1}{m} \int_0^{t_1} F_{Br}(\tau) e^{\frac{\tau-t_1}{Bm}} d\tau. \quad (5)$$

При интегрировании использовано предположение, что за время t_1 ponderomotorная сила не успела значительно измениться. Повторное интегрирование дает

$$z(t) - z(0) = v(0)Bm \left(1 - e^{-\frac{t}{Bm}}\right) + BF_{p,z}(0) \left(t - Bm \left(1 - e^{-\frac{t}{Bm}}\right)\right) + \frac{1}{m} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} F_{Br}(\tau) e^{\frac{\tau-t_1}{Bm}} d\tau. \quad (6)$$

Последний член в (6) описывает броуновское движение за время t . Рассмотрим его отдельно:

$$z_{Br}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} F_{Br}(\tau) e^{\frac{\tau-t_1}{Bm}} d\tau. \quad (7)$$

В случае $\frac{t}{Bm} \gg 1$ (7) представляет собой случайную величину с

$$\begin{aligned} \langle z_{Br}(t) \rangle &= 0 \\ \langle z_{Br}^2(t) \rangle &= 2Dt, \end{aligned} \quad (8)$$

где $D = k_B T B$ - коэффициент диффузии.

В данной работе решение уравнения Ланжевена осуществляется численным методом конечных разностей. Решение (6) на соседних временных шагах n и $n + 1$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$z_{n+1} = z_n + vBm \left(1 - e^{-\frac{\tau}{Bm}}\right) + BF_{p,x}(t_n, z_n) \left(\tau - Bm \left(1 - e^{-\frac{\tau}{Bm}}\right)\right) + z_{Br}(\tau). \quad (9)$$

В численных расчетах использовался временной шаг $\tau = 10^{-6}c$, при котором $\frac{\tau}{Bm} \gg 1$. В этом случае броуновское смещение подчиняется соотношению (8).

В работе будет исследовано движение частиц в ограниченной области. Поэтому при учете броуновского движения полагалось наличие отражающих граничных условий.

Блоховский поверхностный резонанс

Рассматриваемая система обладает большими преимуществами в сравнении с плазмонными структурами. Дело в том, что одной из проблем для оптических пинцетов является нагрев среды, вызванный поглощением в системе [16]: градиент температур приводит к возникновению конвекционных потоков [17]. В то же время рассматриваемая система полностью реализована из непоглощающих материалов, что позволяет избавиться от нагрева.

Рассматриваемая система изображена на рис. 1. Фотонный кристалл Ta_2O_5/SiO_2 с одной стороны накрыт призмой, через которую заводится лазерное излучение, а с другой, – ограничен жидкостью. В жидкость помещены небольшие по сравнению с длиной волны (785 нм) частицы. На границе фотонного кристалла (ФК) и жидкости (зеленая стрелка на рис. 1) возбуждается мода системы – блоховская поверхностная волна. Для возбуждения БПВ может также потребоваться дополнительный слой (см. рис. 1) над ФК. Мода локализована в жидкости за счет полного внутреннего отражения, а в фотонном кристалле – за счет наличия запрещенной зоны у ФК. БПВ распространяется вдоль границы раздела жидкости и ФК и экспоненциально затухает при удалении от границы раздела.

Важной особенностью БПВ является ее высокая добротность (см. рис. 2). С одной стороны, это позволяет значительно увеличить поле БПВ, а с другой стороны, БПВ обладает высокой чувствительностью к диэлектрической проницаемости вблизи границы жидкость/ФК.

В работе при расчетах использован фотонный кристалл $(Ta_2O_5/SiO_2)^4$ с толщинами слоев 260 нм и 148 нм для оксида кремния и оксида тантала соответственно. Действительные показатели преломления $n_{SiO_2} = 1.4536$ и $n_{Ta_2O_5} = 2.0973$. Для визуализации возбуждения БПВ в фотонном кристалле дополнительно вводились небольшие потери с помощью дополнительной мнимой части диэлектрической проницаемости для обоих материалов ФК $\varepsilon'' = 10^{-5}$. Фотонный кристалл был покрыт слоем оксида кремния толщиной 190 нм для согласования импедансов.

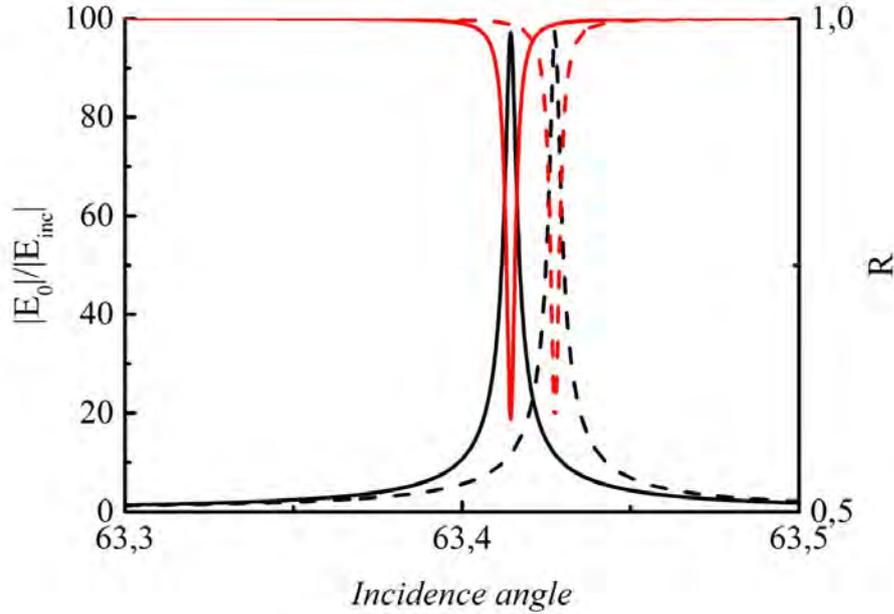


Рисунок 2 – Величина поля блоховской волны на поверхности фотонного кристалла (черный) и коэффициент отражения (красный) от угла падения при изменении показателя преломления на $\Delta n = 10^{-3}$ (сплошные и пунктирные линии). $|E_{inc}|$ – величина поля падающей волны в призме (см. рис. 1)

Влияние частиц на свойства системы

Распределение частиц в системе значительно сказывается на распределении поля. Особенно ярко это проявляется в связи с резонансным характером возбуждения ближних полей в рассматриваемых системах. Изменение диэлектрической проницаемости, вызванное перемещением частицы, может сказаться на величине поля возбуждаемой моды. Этот эффект используется для создания самоиндуцированных ловушек (SIBA trapping) [18–22].

В работе рассматриваются частицы размером много меньше длины волны, что позволяет использовать формулу Максвелл-Гарнетта для определения эффективной диэлектрической проницаемости ε_{eff}

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_b \frac{1 + 2p(z) \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}}{1 - p(z) \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}}, \quad (10)$$

где $p(x)$ – объемная локальная концентрация частиц, ε_e и ε_i – диэлектрические проницаемости жидкости и включений (частиц) соответственно. Концентрация частиц $p(z)$ зависит от расстояния частиц до поверхности слоистой структуры. Для расчетов вводится пространственная дискретизация слоя жидкости с частицами – слой жидкости разбивается на несколько подслоев (см. рис. 1б), для каждого из которых диэлектрическая проницаемость определяется в соответствии с (10).

При разбиении жидкости на подслои нужно учитывать, что слои должны иметь толщину, много меньшую характерного масштаба изменения поля. В данном случае в качестве такого масштаба выступает длина затухания поля в жидкости, определяемая как

$$\beta^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{\varepsilon_{eff} - \varepsilon_{pr} \sin^2 \theta_i}}, \quad (11)$$

где ε_{pr} – диэлектрическая проницаемость призмы, а θ_i – угол падения (см. рис. 1б).

Также необходимо учесть, что толщина слоев должна быть достаточно велика по сравнению с расстоянием, проходимым частицами за временной шаг, используемый в расчетах.

Распределение поля

Для расчетов распределения поля используется метод Т-матриц [13]. При этом учитывается зависимость эффективной диэлектрической проницаемости жидкости от концентрации частиц. На

основе имеющегося распределения частиц вычисляется ε_{eff} для каждого из подслоев жидкости, а после этого производится расчет поля в системе.

На рис. 3 приведены характерные зависимости распределения поля в слое жидкости, полученные при моделировании системы.

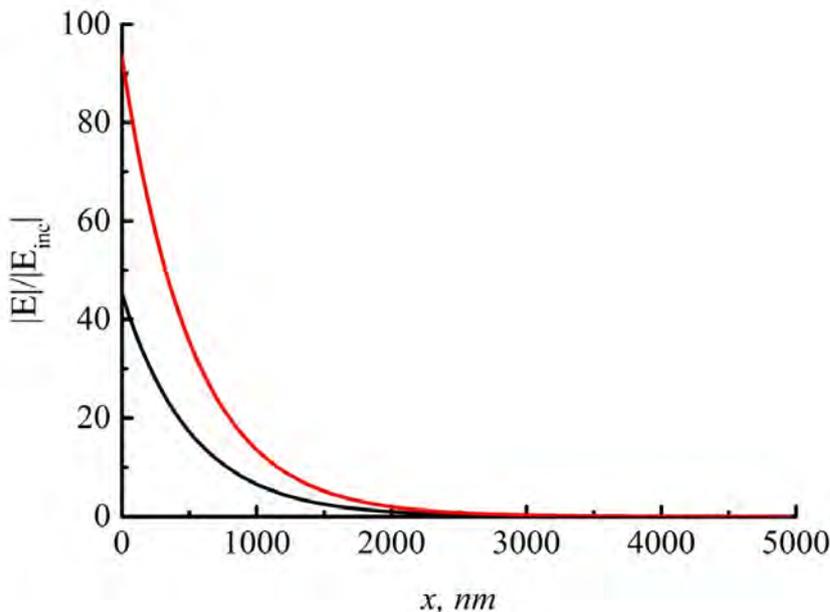


Рисунок 3 – Распределение поля в жидкости в зависимости от расстояния до фотонного кристалла в начальный момент времени (черный) и через 1 с после начала симуляции (красный цвет). Объемная доля частиц в системе $p = 0.0005$, радиус частиц $r = 40 \text{ nm}$, угол падения волны на систему $\theta_i = 63.6217^\circ$

Результаты

Осаждение при малых концентрациях частиц

Для начала рассмотрим осаждение частиц в поле поверхностной волны в приближении малой концентрации частиц: движение частиц не приводит к изменению эффективной диэлектрической проницаемости жидкости. Угол падения излучения составляет $\theta_i = 63.6144^\circ$, что соответствует максимальному усилению поля поверхностной волны. Величина поля на поверхности фотонного кристалла при этом увеличивается почти в 100 раз относительно поля падающего из призмы излучения. Диэлектрическая проницаемость частиц составляет $\varepsilon_i = 2.5$. Длина волны 785 нм. Толщина слоя жидкости над сенсором составляет 5 мкм. Мощность излучения, падающего из призмы на систему, 1.6 kW/cm^2 .

На рис. 4 приведено изменение распределения частиц в системе в зависимости от времени (по вертикальной оси). В начальный момент времени распределение равномерно. Через время 0.3-0.4 с устанавливается распределение, которое с течением времени почти не изменяется. На поверхности фотонного кристалла в слое толщиной 150-200 нм увеличивается концентрация частиц почти в 4 раза по сравнению с начальной. В слое жидкости толщиной около 1 мкм концентрация частиц несколько ниже исходной – частицы перемещены пондеромоторными силами к поверхности ФК.

На установление распределения частиц значительно влияет броуновское движение. Среднеквадратичное смещение броуновской частицы радиусом 40 нм за время 0.4 с при одномерной диффузии составляет $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \approx 2 \text{ мкм}$. Броуновское движение двояким образом влияет на осаждение: с одной стороны, оно препятствует осаждению частиц на поверхность, приводя к диффузии частиц, а с другой стороны, подтягивает удаленные от поверхности фотонного кристалла частицы в поле поверхностной волны.

В силу того, что частицы движутся в стационарном поле, в установившемся распределении частиц диффузионные потоки частиц уравниваются действующей на частицы пондеромоторной силой. Коэффициент диффузии частиц обратно пропорционален их радиусу $D \sim r^{-1}$, а величина пондеромоторной силы (2) растет с радиусом частицы как r^3 . Таким образом, с ростом размеров частицы потенциальная яма, создаваемая поверхностной волной, становится глубже, а время нахождения

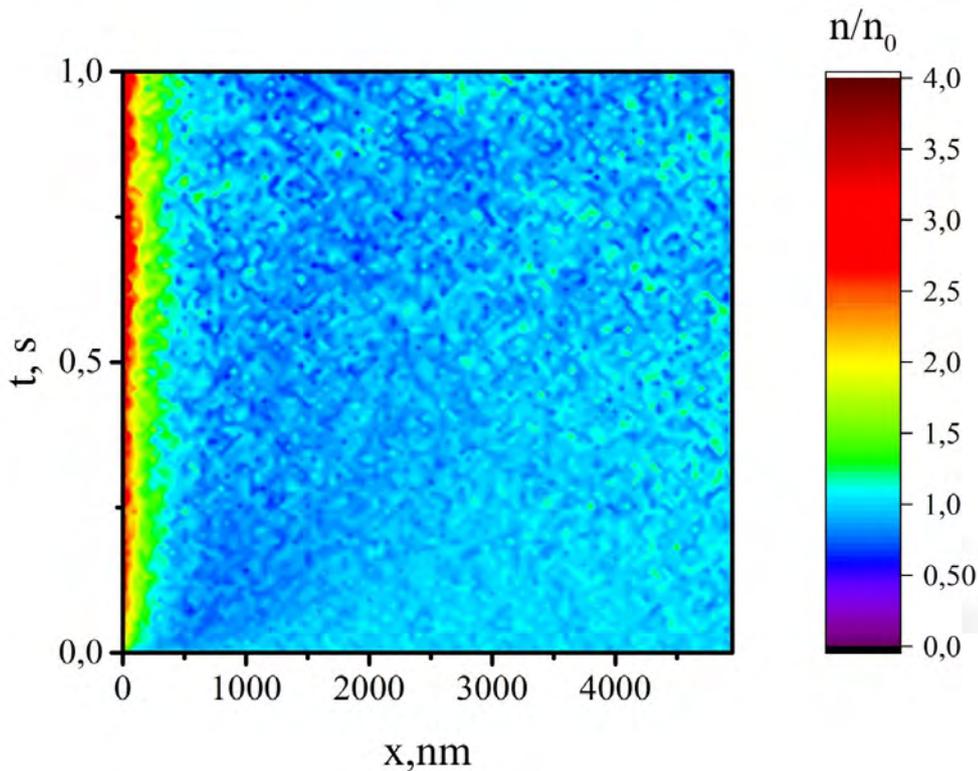


Рисунок 4 – Изменение распределения частиц вдоль системы в зависимости от времени (вертикальная шкала). По горизонтальной шкале отмечена координата в слое жидкости (0 соответствует границе с ФК). Начальная объемная доля частиц $p \rightarrow 0$. Угол падения волны на систему $\theta_i = 63.6144^\circ$

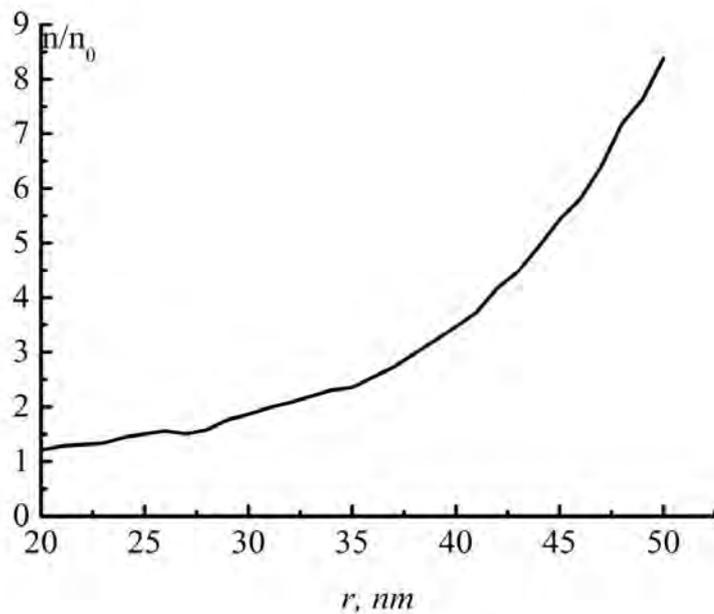


Рисунок 5 – Увеличение концентрации частиц вблизи поверхности ФК в зависимости от радиуса частиц. Диэлектрическая проницаемость частиц $\varepsilon = 2.5$. Угол падения волны на систему $\theta_i = 63.6144^\circ$

частицы вблизи фотонного кристалла растут. В связи с этим с ростом размера частиц увеличивается и их концентрация у поверхности кристалла в установившемся распределении (см. рис. 5). Расчеты показывают, что при используемых мощностях излучения осаждение частиц становится заметным при радиусах $r > 20 \text{ nm}$.

Осаждение при конечных концентрациях

Перейдем теперь к случаю, когда объемная доля частиц достаточно велика, чтобы влиять на распределение поля в системе. При этом необходимо рассматривать самосогласованную задачу.

Расчетные параметры системы будут такими же, как и в предыдущем разделе, за исключением угла падения волны. Дело в том, что объемная доля частиц в жидкости p приводит к изменению эффективной диэлектрической проницаемости ε_{eff} (10). На рис. 6а показана зависимость поля на поверхности фотонного кристалла в зависимости от объемной доли частиц (частицы распределены равномерно по объему) и угла падения. Можно видеть, что увеличение концентрации частиц (увеличение ε_{eff}) приводит к увеличению угла, соответствующего возбуждению БПВ. При этом осаждение частиц на поверхность фотонного кристалла приведет к росту ε_{eff} приповерхностного слоя жидкости. Поэтому для более эффективного осаждения необходимо использовать углы, большие угла возбуждения БПВ (см. рис. 6а). В расчете был использован угол $\theta_i = 63.6217^\circ$.

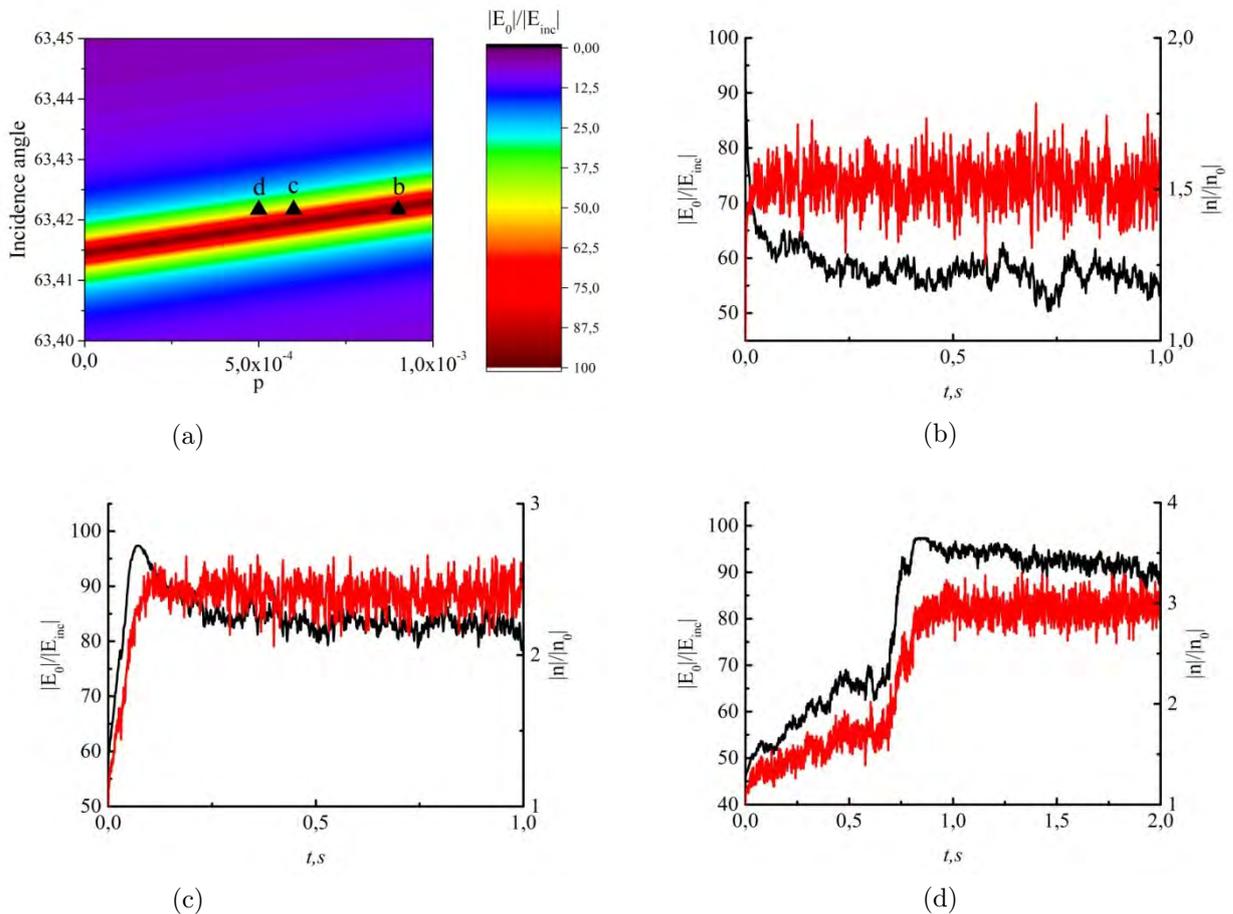


Рисунок 6 – (а) Зависимость поля у поверхности ФК от объемной доли частиц в жидкости при их равномерном распределении по объему (по горизонтали) и от угла падения излучения (по вертикали). (б)-(г) Зависимость величины электрического поля (черный) и концентрации частиц (красный) у поверхности ФК при различных начальных концентрациях частиц n_0 в жидкости. Начальная концентрация n_0 соответствует: б) правому треугольнику на рис. 6а; в) среднему треугольнику на рис. 6а; д) левому треугольнику на рис. 6а.

Радиус частиц 40 нм

На рис. 7 приведено распределение частиц в системе в зависимости от времени для случая на рис. 6г.

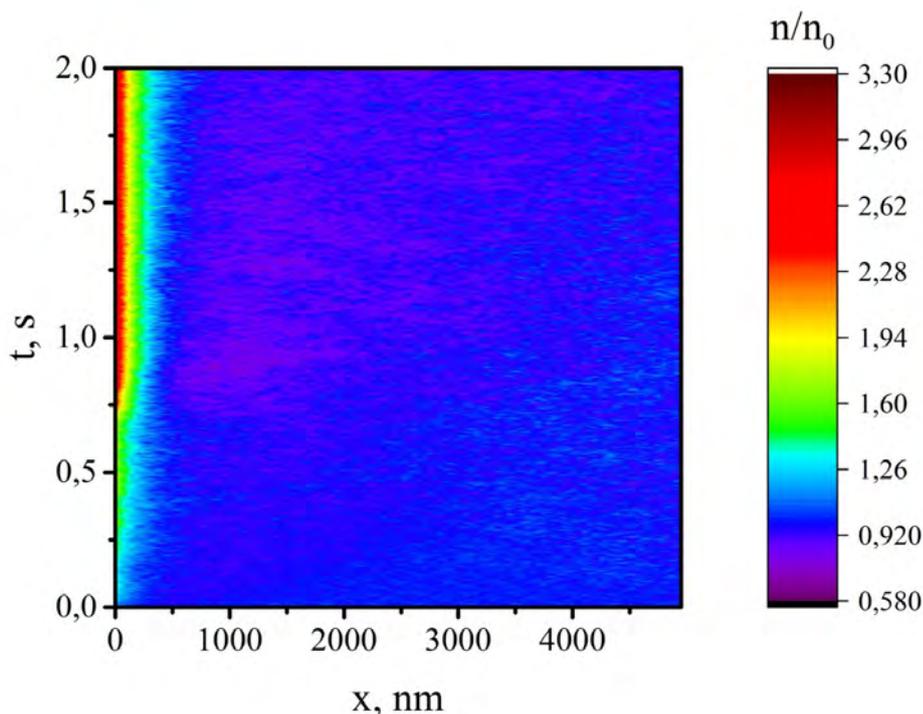


Рисунок 7 – Изменение распределения частиц вдоль системы в зависимости от времени (вертикальная шкала). По горизонтальной шкале отмечена координата в слое жидкости (0 соответствует границе с ФК). Начальная объемная доля частиц $p = 0,0005$

Заключение

В работе исследовано осаждение нанометровых частиц в поле поверхностной блоховской волны. Численным моделированием показана возможность осаждения диэлектрических частиц с характерным размером в несколько десятков нанометров.

Показано, что броуновское движение проявляется в процессах осаждения частиц двояким образом: с одной стороны, диффузионные потоки уменьшают концентрацию частиц непосредственно в максимуме поля, а с другой стороны, броуновское движение приводит к эффективному переносу частиц в область действия электромагнитной ловушки.

Проведено самосогласованное моделирование динамики частиц, учитывающее влияние концентрации частиц на распределение поля блоховской волны. Продемонстрирован принцип самоиндуцируемой электромагнитной ловушки.

Список литературы

- [1] Myszka D.G. et al. Extending the Range of Rate Constants Available from BIACORE: Interpreting Mass Transport-Influenced Binding Data // *Biophys J. Biophysical Society*, 1998. Vol. 75, № 2. P. 583–594.
- [2] Pence I., Mahadevan-Jansen A. Clinical instrumentation and applications of Raman spectroscopy // *Chem Soc Rev. Royal Society of Chemistry*, 2016. Vol. 45, № 7. P. 1958–1979.
- [3] Xie W., Schlücker S. Medical applications of surface-enhanced Raman scattering // *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2013. Vol. 15, № 15. P. 5329.
- [4] Nguyen H. et al. Surface Plasmon Resonance: A Versatile Technique for Biosensor Applications // *Sensors*. MDPI AG, 2015. Vol. 15, № 5. P. 10481–10510.
- [5] Szabo A., Stolz L., Granzow R. Surface plasmon resonance and its use in biomolecular interaction analysis (BIA) // *Curr Opin Struct Biol*. 1995. Vol. 5, № 5. P. 699–705.
- [6] Baryshev A. V., Merzlikin A.M., Inoue M. Efficiency of optical sensing by a plasmonic photonic-crystal slab // *J Phys D Appl Phys*. 2013. Vol. 46, № 12. P. 125107.
- [7] Berthelot J. et al. Three-dimensional manipulation with scanning near-field optical nanotweezers // *Nat*

- Nanotechnol. Nature Publishing Group, 2014. Vol. 9, № 4. P. 295–299.
- [8] Ashkin A. Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure // *Phys Rev Lett*. 1970. Vol. 24, № 4. P. 156–159.
- [9] Volpe G. et al. Influence of Noise on Force Measurements // *Phys Rev Lett*. 2010. Vol. 104, № 17. P. 170602.
- [10] Maragò O.M. et al. Optical trapping and manipulation of nanostructures // *Nat Nanotechnol*. Nature Publishing Group, 2013. Vol. 8, № 11. P. 807–819.
- [11] Svoboda K., Block S.M. Optical trapping of metallic Rayleigh particles // *Opt Lett*. 1994. Vol. 19, № 13. P. 930.
- [12] Hansen P.M. et al. Expanding the Optical Trapping Range of Gold Nanoparticles // *Nano Lett*. 2005. Vol. 5, № 10. P. 1937–1942.
- [13] Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах / Под ред. Сисакян И.Н. Москва: Мир, 1987. 616 p.
- [14] Novotny L., Hecht B. Principles of Nano-Optics // *Principles of Nano-Optics*. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [15] Kuriakose S. et al. Near-field optical trapping with an ultrashort pulsed laser beam // *Appl Phys Lett*. 2008. Vol. 92, № 8.
- [16] Garcés-Chávez V. et al. Extended organization of colloidal microparticles by surface plasmon polariton excitation // *Phys Rev B*. 2006. Vol. 73, № 8. P. 085417.
- [17] Juan M.L., Righini M., Quidant R. Plasmon nano-optical tweezers // *Nat Photonics*. Nature Publishing Group, 2011. Vol. 5, № 6. P. 349–356.
- [18] Juan M.L. et al. Self-induced back-action optical trapping of dielectric nanoparticles // *Nat Phys*. Nature Publishing Group, 2009. Vol. 5, № 12. P. 915–919.
- [19] Genet C., Ebbesen T.W. Light in tiny holes // *Nature*. Nature Publishing Group, 2007. Vol. 445, № 7123. P. 39–46.
- [20] García-Vidal F.J. et al. Transmission of Light through a Single Rectangular Hole // *Phys Rev Lett*. 2005. Vol. 95, № 10. P. 103901.
- [21] García-Vidal F.J. et al. Transmission of light through a single rectangular hole in a real metal // *Phys Rev B Condens Matter Mater Phys*. 2006. Vol. 74, № 15.
- [22] Garcia de Abajo F. Light transmission through a single cylindrical hole in a metallic film // *Opt Express*. 2002. Vol. 10, № 25. P. 1475.

NANOPARTICLES MANIPULATION BY THE NEAR FIELD OF SURFACE WAVE

R.S. Puzko*¹

¹ Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA), Moscow, Russia

* roman998@mail.ru

Abstract

The manipulation of nanoparticles by near-field of surface wave in all-dielectric system is studied. The optical trapping of nanoparticles significantly smaller than the wavelength is studied in detail. In particular, the effect of self-induced back-action is demonstrated.

Key words: optical tweezers, surface wace, photonic crystal

ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ РАССЕЙЯНИЯ УЗКИМИ ПОЛЫМИ ЩЕЛЯМИ ПРИ УЧЁТЕ АДМИТТАНСА ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ

К.М. Басков¹, И.И. Краснолобов¹, А.М. Лебедев *¹, В.Н. Семененко¹, Т.А. Фурманова¹

¹ *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия*

Статья поступила в редакцию 21.12.2023
Одобрена после рецензирования 12.01.2024
Принята к публикации 18.01.2024

Аннотация

Получено аналитическое выражение для адмиттанса внешней области, примыкающей ко входу в щель. С использованием этого результата были получены аналитические выражения для интенсивности двухпозиционного и обратного рассеяния полыми, прямыми и узкими по сравнению с длиной волны щелями в виде канавок либо сквозных зазоров в локально плоской поверхности металлического объекта. Учёт адмиттанса внешней области в расчётах позволил получить высокую точность вычисления полей рассеяния, в том числе в окрестности минимумов и максимумов интенсивности рассеяния канавкой. Из общих выражений для интенсивности рассеяния были получены оценочные формулы для эффективной поверхности рассеяния канавок в области её минимальных и максимальных значений. Показано, что в области минимальных значений эффективная поверхность рассеяния узких канавок сильно зависит от частоты, а также от ширины и глубины канавки, вид этой зависимости выявлен. Наоборот, максимумы эффективной поверхности рассеяния узкими канавками, достигаемые при резонансах стоячей волны внутри канавки, оцениваются как $16/\pi$, т.е. приблизительно 5 квадратных метров на метр длины, и в первом приближении не зависят от частоты, ширины и глубины канавки. Была выполнена проверка полученных выражений путём сравнения результатов расчётов диаграмм обратного рассеяния щелями методом поверхностных интегральных уравнений и с помощью полученных в данной работе соотношений.

Ключевые слова: щель, канавка, сквозной зазор, эффективная поверхность рассеяния, адмиттанс, однододовое приближение

EDN IKVOKZ

doi:[10.24412/2949-0553-2023-68-22-37](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2023-68-22-37)

Введение: актуальность задачи и принятые условия

Оценка интенсивности рассеяния электромагнитных волн щелями в поверхностях металлических элементов необходима при анализе "отклика" объектов на их облучение электромагнитной волной, поскольку разного рода щели присутствуют в конструкциях практически всех технических объектов. В частности, щели могут быть в виде канавок по местам стыков между листами металлической обшивки либо в виде сквозных зазоров по краям технологических отверстий. Отметим, что подавляющее большинство щелей являются узкими и длинными для волн от сантиметрового до метрового диапазонов, обычно используемых в радиолокации. С методической точки зрения, полые щели в плоской поверхности металлического объекта являются каноническими рассеивателями в ряду таких объектов, как металлические сфера, цилиндр, клин, прямоугольная пластина. Однако необходимые аналитические выражения для расчётов интенсивности рассеяния щелями отсутствуют в известных справочниках [1, 2], а в литературе обсуждаются результаты численных исследований и натуральных экспериментов по рассеянию щелями, а также приводятся полуэмпирические формулы (смотри, например, [3]).

В данной статье, являющейся развитием работы [4], получены выражения для интенсивности двухпозиционного и обратного рассеяния полыми, прямыми, узкими и достаточно длинными по сравне-

* Автор, ответственный за переписку: Андрей Михайлович Лебедев, itae@itae.ru

нию с длиной волны щелями в локально плоской поверхности металлического объекта. Таким образом, будем полагать, что ширина щели много меньше длины волны $\Delta \ll \lambda$, а длина щели L порядка и более λ , где λ - длина волны. Выражения получены для двух вариантов щелей: в виде канавок (щели, имеющие дно), и в виде сквозных зазоров (щели, не имеющие дна). В данной работе выражения для интенсивности рассеяния щелями включают аналитическое представление для адмиттанса внешней области, примыкающей ко входу в щель (и к выходу из неё для сквозного зазора), в отличие от [4], где адмиттанс внешней области получался в результате вычислительного эксперимента. В свою очередь, наличие выражения для адмиттанса внешней области позволило сделать некоторые важные аналитические оценки.

Интенсивность рассеяния щелями будем количественно характеризовать их эффективной поверхностью рассеяния (ЭПР) σ , измеряемой в m^2 [1, 2]. ЭПР щели при обратном и двухпозиционном рассеянии будем определять в этой работе в плоскости, перпендикулярной щели. Именно в этой плоскости обратное рассеяние имеет выраженный максимум вследствие синфазного сложения вкладов от всех участков по длине щели. Двухпозиционное рассеяние щелью достигает максимальной интенсивности, когда направления облучения и приёма принадлежат этой же плоскости, хотя локальный максимум существенно менее выражен. Будем также полагать, что вектор напряжённости электрического поля падающей волны находится в плоскости падения и, следовательно, перпендикулярен щели. Именно при такой поляризации падающей волны токи, наводимые в окрестности щели, пересекают её, что и приводит к переизлучению щелью.

Будем полагать, что щель в идеальном электрическом проводнике имеет прямоугольное поперечное сечение $\Delta \times D$. Здесь D - глубина щели, на величину которой никаких условий не накладывается. Поперечные сечения двух рассматриваемых типов щелей представлены на рисунке 1. На том же рисунке 1 показан способ отсчёта углов облучения φ_0 и приёма φ в системе координат, связанной со входом в щель и образуемой правой тройкой единичных векторов $\{\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{z}\}$: углы отсчитываются в плоскости, перпендикулярной щели и оси \vec{z} , идущей вдоль щели, от положительного направления оси $\vec{\tau}$, направленной поперёк щели, к нормали \vec{n} к поверхности со входом в щель. Для сквозного зазора в полупространстве за ним угол для направления на приёмник вводится в аналогичной системе координат, развёрнутой на 180° вокруг оси \vec{z} и привязанной к выходу из зазора.

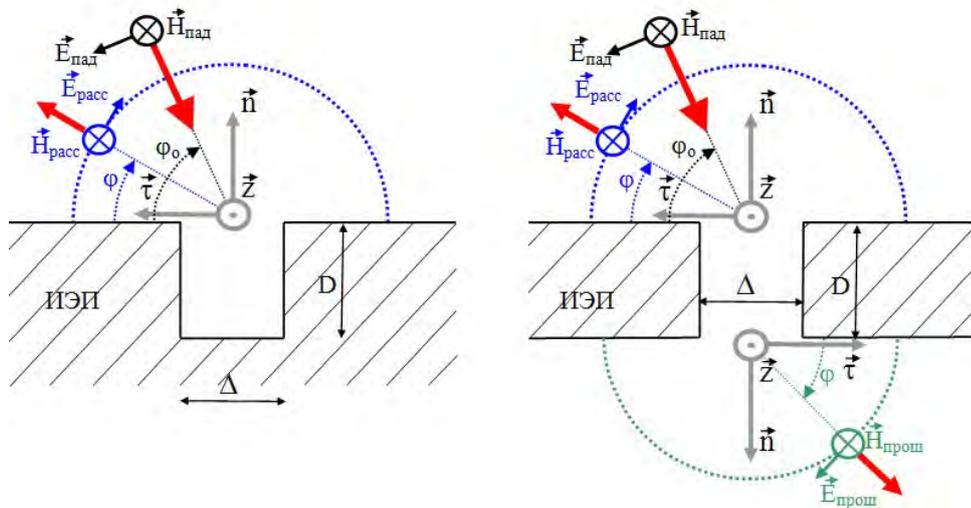


Рисунок 1 – Поперечные сечения щелей в виде канавки и сквозного зазора в поверхности идеального электрического проводника

С физической точки зрения, необычность рассеяния узкими щелями заключается в слабой зависимости бистатической ЭПР щели и от направления приёма, и от направления облучения. Вместе указанные особенности двухпозиционного рассеяния приводят к слабой зависимости моностатической ЭПР щели от направления визирования. Угловая однородность бистатической и моностатической диаграмм рассеяния сближает узкие щели с такими рассеивателями, как металлические сфера и хаотизатор электромагнитной волны в виде полости с узким входом [1, 2], известными постоянством либо слабой угловой зависимостью бистатической и моностатической ЭПР от направления визирования. Заметим, что в случае узкой щели речь идёт об угловой однородности диаграмм только для волны одной поляризации.

В технических приложениях указанные выше особенности рассеяния узкими щелями делают особенно актуальной оценку их вклада в поле рассеяния. Так, в направлениях, в которых вклады

других центров рассеяния могут стать малыми, узкие щели сохраняют приблизительно постоянную ЭПР и в таком случае могут определять уровень рассеяния всем объектом. При этом в условиях сохранения длины и ориентации узкой щели её заметность нельзя минимизировать изменениями формы объекта, например, отклонением нормали к поверхности, по которой проходит щель, от направления визирования.

Основные предположения при оценке интенсивности рассеяния щелями

При получении выражений для ЭПР щелей в данной работе сделаны два существенных предположения, обоснованность которых подтверждается изложенными далее результатами тестирования. Рассмотрим сделанные предположения подробнее.

Во-первых, это предположение о том, что двумерные составляющие у распределений электрического поля и поверхностного тока в поперечных сечениях щели, перпендикулярных её длинным кромкам, сохраняются неизменными по всей длине щели L - такими же, как при рассеянии падающей плоской волны на бесконечной щели в бесконечной плоской поверхности металлического объекта. При этом не имеет значения, есть или отсутствуют металлические торцы на концах щели (если торец отсутствует, то щель либо является частью составной щели и стыкуется в этом месте с другим участком составной щели, либо обрывается вследствие окончания поверхности, в которой проходит щель). Тогда ЭПР достаточно длинной щели пропорциональна квадрату её длины $\sigma \sim L^2$ именно за счёт преобладания в составе рассеянного поля результата синфазного сложения вкладов двумерных составляющих полей и токов на всех элементах щели (рассеянное поле пропорционально длине щели L , ЭПР пропорциональна L^2). Доминирование вклада неизменных по длине щели двумерных составляющих полей и токов приводит к возможности использовать погонную ЭПР $\bar{\sigma}$ [м²], приходящуюся на 1 м длины, как характеристику интенсивности рассеяния щелью в плоскости, перпендикулярной щели:

$$\sigma(\varphi_o, \varphi) = \bar{\sigma}(\varphi_o, \varphi) \cdot (L / 1.m)^2. \quad (1)$$

Отклонения распределений полей и токов в поперечном сечении щели от характерных для двумерной задачи локализуются в окрестности концов щели, либо могут принимать вид волн, бегущих вдоль кромок щели – в любом случае влияние отклонений от двумерного решения на формирование диаграммы рассеяния в плоскости, перпендикулярной щели, является заведомо малым для достаточно протяжённых щелей.

Во-вторых, при решении задачи рассеяния на щели как бесконечной (двумерной), так и конечной длины делается предположение достаточной точности решения в одномодовом приближении. Именно, полагается достаточным для количественного описания формирования рассеяния узкой щелью и прохода волны через щель (в случае сквозного зазора) проследивать только движение фрагментов ТЕМ-волн во встречных направлениях по нормали ко входу и дну канавки либо по нормали ко входу и выходу сквозного зазора. Таким образом, используя одномодовое приближение, пренебрегаем фактом существования квазистатической особенности напряжённости электрического поля на кромках щели [4] и существованием высших типов волн в объёме щели. В связи с этим необходимо пояснить, что составляющие эквивалентных поверхностных магнитных токов, вводимые во входной и выходной (для сквозного зазора) плоскостях щели и соответствующие прикромочным участкам роста напряжённости электрического поля, имеют быстро меняющуюся амплитуду на масштабах существенно меньше длины волны и поэтому излучают вовне пренебрежимо мало. Также практика расчётов показала, что возбуждением высших типов волн в объёме щели можно пренебречь при ширине щели вплоть до половины длины волны.

В рамках одномодового приближения после выбора представления полей внутри щели в виде ТЕМ-волн, движущихся навстречу друг другу, необходимо и для падающего и рассеянного полей во входном отверстии щели, а также прошедшего поля в выходном отверстии щели выделять только постоянные составляющие напряжённостей электрического и магнитного полей E_τ , H_z . Далее при решении в одномодовом приближении накладываются условия непрерывности постоянных составляющих E_τ , H_z при переходе через плоскости входа в щель и выхода из неё.

Тангенциальные составляющие напряжённостей электрического и магнитного полей на входе в щель и выходе из щели

Будем анализировать методически наиболее сложный случай рассеяния на щели в виде сквозного зазора конечной толщины. От полученного решения перейти к решению для двух других видов щелей можно соответствующей редукцией: у сквозного зазора исчезающе малой толщины в идеальном

электрическом проводнике отсутствует внутренняя область щели, так что входная и выходная плоскости щели совпадают; у канавки на закороченном выходе из щели (на дне канавки) $E_\tau = 0$.

Все величины во входной плоскости щели будем пометать индексом A , в выходной плоскости (на дне канавки) - индексом B , рисунок 2а. Введём две пары систем координат в виде правых троек единичных векторов, привязанных к границам A и B : $\{\vec{n}_A, \vec{\tau}_A, \vec{z}\}$, $\{\vec{n}_{A'}, \vec{\tau}_{A'}, \vec{z}\}$ и $\{\vec{n}_B, \vec{\tau}_B, \vec{z}\}$, $\{\vec{n}_{B'}, \vec{\tau}_{B'}, \vec{z}\}$, рисунок 2б. Оси \vec{z} всех систем координат ориентированы в одном направлении вдоль щели и по касательной к плоскости входа или выхода. При этом оси \vec{n} и $\vec{\tau}$ ориентированы, соответственно, по нормали и по касательной поперёк щели к плоскостям A и B .

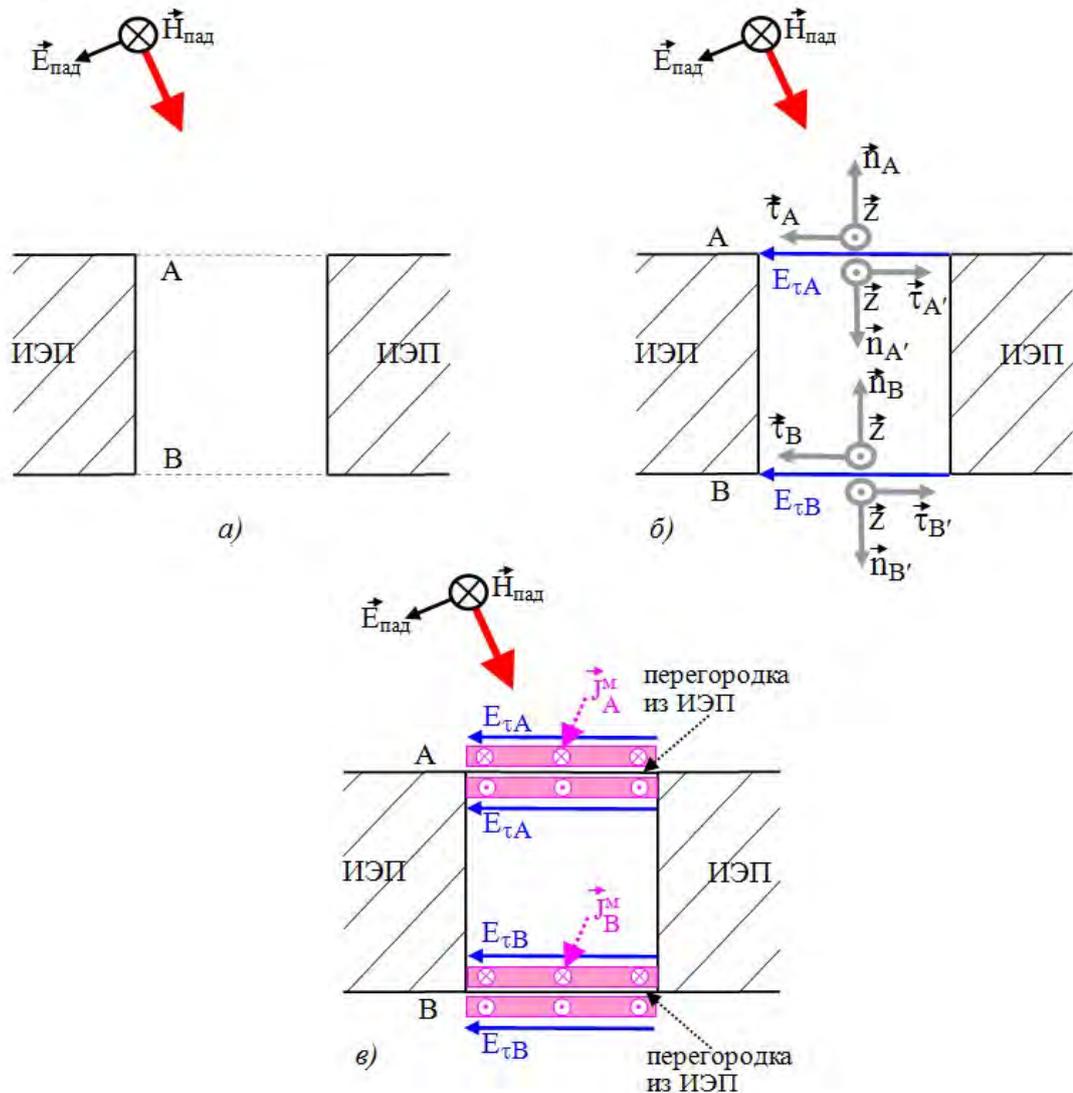


Рисунок 2 – Введение перегородок из идеального электрического проводника и эквивалентных поверхностных токов во входном и выходном отверстиях щели

Будем при выводе соотношений в этом пункте полагать, что адмиттансы всех областей по отношению ко входу и выходу щели известны и определяют связь тангенциальных составляющих напряжённостей электрического и магнитного полей E_τ и H_z во входной и выходной плоскостях щели (для рассматриваемой поляризации у вектора напряжённости магнитного поля есть только z -овая составляющая, которая на входах A и B является касательной к их поверхности). Тогда имеем связь на входе A в щель с внешней стороны: $H_{zA} = Y_{внеш} \cdot E_{\tau A}$, где $Y_{внеш}$ - адмиттанс внешней области, примыкающей ко входу в щель. Аналогично на выходе B сквозного зазора имеем: $H_{zB'} = Y_{внеш} \cdot E_{\tau B'}$. Для внутренней области щели имеем описание через матрицу адмиттансов:

$$\begin{Bmatrix} H_{zA'} \\ H_{zB} \end{Bmatrix} = [Y_{внутр}] \cdot \begin{Bmatrix} E_{\tau A'} \\ E_{\tau B'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} \\ Y_{BA} & Y_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{\tau A'} \\ E_{\tau B'} \end{Bmatrix}$$

Выражения для адмиттансов приводятся далее в следующем разделе.

Две из введённых систем координат выберем в качестве основных: $\{\vec{n}_A, \vec{\tau}_A, \vec{z}\}$ и $\{\vec{n}_B, \vec{\tau}_B, \vec{z}\}$. При записи граничных условий в плоскостях А и В составляющие векторов напряжённости электрического поля будем считать положительными при их ориентации в направлении оси $\vec{\tau}_A$ на границе А и в направлении оси $\vec{\tau}_B$ на границе В. Составляющие векторов напряжённости магнитного поля будем считать положительными при их ориентации в направлении оси \vec{z} .

На основе теоремы эквивалентности, на входе и выходе щели введём бесконечно тонкие перегородки из идеального электрического проводника и для воссоздания реально существующего поля по обе стороны от перегородок на исчезающе малом расстоянии от них наложим листки эквивалентных поверхностных магнитных токов по контуру входного и выходного отверстия, рисунок 2в. Поверхностные плотности магнитных токов задаются по правилу

$$\tilde{J}_A^M = [\tilde{E}_{\tau A}, \tilde{n}_A], \quad \tilde{J}_{A'}^M = [\tilde{E}_{\tau A}, \tilde{n}_{A'}], \quad \tilde{J}_B^M = [\tilde{E}_{\tau B}, \tilde{n}_B], \quad \tilde{J}_{B'}^M = [\tilde{E}_{\tau B}, \tilde{n}_{B'}],$$

где $\vec{E}_{\tau A}$ и $\vec{E}_{\tau B}$ - составляющие напряжённости электрического поля во входной А и выходной В плоскостях. Тем самым магнитные токи берутся равными по величине и противоположными по направлению по обе стороны плоскостей А и В, чем обеспечивается непрерывность изменения $E_{\tau A}$ и $E_{\tau B}$ при переходе через плоскости А и В. В одномодовом приближении модуль и фаза эквивалентного поверхностного магнитного тока постоянны по всей площади отверстия щели. Величины $E_{\tau A}$ и $E_{\tau B}$ и, следовательно, поверхностные плотности магнитных токов J_A^M, J_B^M определяются из условий равенства H_{zA}, H_{zB} по обе стороны плоскостей отверстий.

Приём декомпозиции на отдельные области металлизацией границ между областями с восстановлением реального поля наложением эквивалентных поверхностных магнитных токов отработан как при расчёте апертурных и щелевых антенн [5], так и как методический приём при разработке численных методов электродинамики, например, при применении разных численных методов в граничащих областях [6].

Приравнивая поля H_{zA}, H_{zB} по обе стороны плоскостей А и В, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно полей $E_{\tau A}$ и $E_{\tau B}$ в этих плоскостях.

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\tau A} = Y_{ext} \cdot E_{\tau A} + 2 \cdot H_{no} \\ H_{\tau A} = Y_{AA} \cdot (-E_{\tau A}) + Y_{AB} \cdot E_{\tau B} \\ H_{\tau B} = Y_{BA} \cdot (-E_{\tau A}) + Y_{BB} \cdot E_{\tau B} \\ H_{\tau B} = Y_{ext} \cdot (-E_{\tau B}) \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Второе слагаемое в правой части первого уравнения в (2) указывает на удвоение напряжённости результирующего магнитного поля по сравнению с падающим при отражении падающей волны от плоской поверхности идеального электрического проводника, полученной в результате введения перегородки по входу А. Поскольку решение задачи рассеяния щелью ищется в одномодовом приближении, то и H_{no} в (2) является постоянной составляющей напряжённости магнитного поля падающей волны на входе в щель. Так как магнитное поле падающей волны меняется на входе А по следующему закону:

$$H_{nadz} = -H_{nz} \cdot \exp(ik_0\tau_A \cdot \cos \varphi_0),$$

где H_{nz} - комплексная амплитуда напряжённости магнитного поля падающей волны в начале системы координат $\{\vec{n}_A, \vec{\tau}_A, \vec{z}\}$, то величина H_{no} определяется как

$$H_{no} = \frac{1}{\Delta} \cdot \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} H_{nad} \cdot d\tau = -H_{nz} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k_0 \Delta \cdot \cos \varphi_0}{2}\right)}{\left(\frac{k_0 \Delta \cdot \cos \varphi_0}{2}\right)} \quad (3)$$

Для выбранной поляризации падающей волны величина H_{nz} не зависит от угла облучения щели φ_0 .

Знаки перед $E_{\tau A}$ во втором и третьем уравнениях и перед $\vec{E}_{\tau B}$ в четвёртом уравнении системы (2) выбраны с учётом того, что направления $\vec{\tau}_{A'}$ и $\vec{\tau}_{B'}$ противоположны тем, в которых проекции векторов считаются положительными при записи граничных условий в плоскостях А и В.

Получаем из (2) поля на входе А и выходе В сквозного зазора конечной толщины:

$$E_{\tau A} = \frac{2 \cdot (Y_{AA} + Y_{внеш}) \cdot H_{no}}{-(Y_{AA} + Y_{внеш})^2 + Y_{AB}^2}, \quad E_{\tau B} = \frac{2 \cdot Y_{AB} \cdot H_{no}}{-(Y_{AA} + Y_{внеш})^2 + Y_{AB}^2}. \quad (4)$$

Удаляя из системы (2) второе и третье уравнения, получаем поле в отверстии сквозного зазора в бесконечно тонком слое идеального электрического проводника:

$$E_{\tau A} = E_{\tau B} = - \frac{H_{no}}{Y_{внеш}}. \quad (5)$$

Из (5) сразу следует, что двухпозиционные диаграммы рассеяния сквозным зазором исчезающе малой глубины совпадают в полупространствах перед и за зазором.

Отбрасывая третье и четвёртое уравнения в системе (2), получаем поле на входе в канавку:

$$E_{\tau A} = - \frac{2 \cdot H_{no}}{Y_{AA} + Y_{внеш}}. \quad (6)$$

Адмиттансы внутренней области щели и внешней области, примыкающей ко входу в щель

Элементы матрицы адмиттансов внутренней области щели находятся из решения следующих двух физических задач. Входы в щель закорачиваются введением перегородок из идеального электрического проводника, внутренняя область возбуждается наложением листков поверхностного магнитного тока сначала \vec{J}_A^M на вход А, затем \vec{J}_B^M на вход В. Тем самым во внутренней области ставятся две граничные задачи для вектора \vec{E} : сначала на входе А задаётся $E_{\tau A'} = J_A^M$, затем на входе В задаётся $E_{\tau B} = J_B^M$ при равенстве E_{τ} нулю на всех остальных границах внутренней области. В обоих случаях требуется найти "отклик" в виде тангенциальных ко входам А и В составляющих напряжённости магнитного поля $H_{zA'}$, H_{zB} . Поля $H_{zA'}$, H_{zB} определяются из решения граничных задач. Элементы матрицы адмиттансов находятся как коэффициенты пропорциональности между $E_{\tau A'}$, $E_{\tau B}$ и $H_{zA'}$, H_{zB} . Вид элементов матрицы адмиттансов известен в литературе:

$$Y_{AA} = Y_{BB} = \frac{1}{iZ_o \cdot tg(k_o D)}, Y_{AB} = Y_{BA} = \frac{1}{iZ_o \cdot \sin(k_o D)} \quad (7)$$

(смотри, например, [4]).

Адмиттанс $Y_{внеш}$ области, внешней по отношению ко входу в щель, ищется в последовательности, точно соответствующей описанной выше для нахождения элементов матрицы адмиттансов внутренней области щели. Физическая задача по определению $Y_{внеш}$ ставится следующим образом. На металлизированную поверхность входа в щель с внешней стороны накладывается листок магнитного тока с вектором поверхностной плотности \vec{J}_A^M , имеющей постоянную по площади входа комплексную амплитуду, рисунок 3а. Тогда граничная задача для нахождения поля \vec{E} , создаваемого поверхностным током, формулируется так: поле E_{τ} на границе $n_A = 0$ полупространства численно равно $-J_{A_z}^M$ в интервале $\tau = [-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$ и нулю вне этого интервала, рисунок 3б.

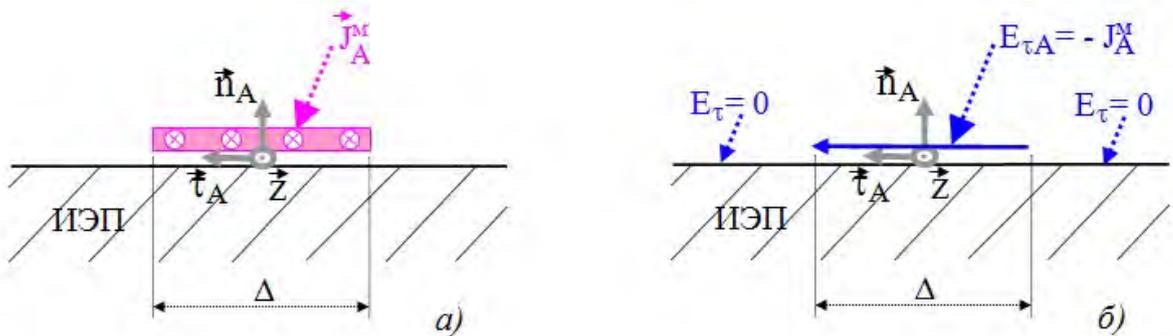


Рисунок 3 – К постановке граничной задачи о нахождении поля, возбуждаемого эквивалентным поверхностным током, наложенным по контуру отверстия щели, в полупространстве над щелью

Сформулированная граничная задача может быть решена аналитически, основываясь на представлении решения в виде спектра плоских волн [7, 8], а далее в рамках того же подхода может быть найдено выражение для магнитного поля всюду, в частности, на входе в щель. Тогда $Y_{внеш}$ получается как коэффициент пропорциональности между $E_{\tau A}$ и постоянной составляющей напряжённости магнитного поля на щели H_{zo} .

Спектральная составляющая поля E_{τ} имеет вид $e^{i(\chi \cdot \tau - \sqrt{k_o^2 - \chi^2} \cdot n)}$. Отношение между спектральными плотностями H_z и E_{τ} даётся выражением

$$g_{H_z}(\chi) = \frac{k_o}{Z_o \cdot \sqrt{k_o^2 - \chi^2}} \cdot g_{E_z}(\chi),$$

следующим из первого уравнения Максвелла. Спектральная плотность E_τ находится из удовлетворения граничным условиям на E_τ при $n_A = 0$ и имеет вид:

$$g_{E_z}(\chi) = E_{\tau A} \cdot \Delta \cdot \frac{\sin\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)}{\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)}.$$

Тогда получаем решение граничной задачи для E_τ в полупространстве над щелью:

$$E_\tau(n, \tau) = \frac{E_{\tau A} \cdot \Delta}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)}{\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)} \cdot e^{i(\chi \cdot \tau - \sqrt{k_o^2 - \chi^2} \cdot n)} d\chi.$$

Отсюда для H_z в той же области получается следующее представление:

$$H_z(n, \tau) = \frac{E_{\tau A} \cdot \Delta \cdot k_o}{2\pi \cdot Z_o} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k_o^2 - \chi^2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)}{\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)} \cdot e^{i(\chi \cdot \tau - \sqrt{k_o^2 - \chi^2} \cdot n)} d\chi.$$

Вычисляя постоянную составляющую H_z на входе в щель

$$H_{z0} = \frac{1}{\Delta} \cdot \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} H_z(n=0, \tau) \cdot d\tau,$$

получим выражение для адмиттанса $Y_{внеш}$ внешней области, примыкающей ко входу в щель:

$$Y_{внеш} = \frac{k_o \cdot \Delta}{\pi \cdot Z_o} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k_o^2 - \chi^2}} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)}{\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)} \right)^2 d\chi \quad (8)$$

В соответствии с выражением (8), действительную часть $Y_{внеш}$ даёт интеграл от 0 до k_o , мнимую - интеграл от k_o до ∞ . При этом поскольку $\sqrt{k_o^2 - \chi^2} = -i\sqrt{\chi^2 - k_o^2}$ при $\chi > k_o$ из условия экспоненциального убывания спектральной составляющей в направлении роста координаты n , то адмиттанс внешней области всегда имеет ёмкостной характер $Im(Y_{внеш}) > 0$.

Анализ выражения (8) показывает, что $Y_{внеш}$ - это функция параметра Δ/λ , несмотря на отсутствие явной зависимости от Δ/λ в (8). Действительно, первый множитель подынтегральной функции $\frac{1}{\sqrt{k_o^2 - \chi^2}}$ обуславливает наличие у неё интегрируемой особенности в точке $\chi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$, второй множитель вида $\left(\frac{\sin\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)}{\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)}\right)^2$ представляет собой интегрируемую функцию, основная величина интеграла от которой достигается при интегрировании по χ в левой части интервала от 0 до $\chi_2 = \frac{2\pi}{\Delta}$ - до первого нуля функции $\sin\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)$. Таким образом, изменение положения интегрируемой особенности относительно нулей функции $\sin\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)$ определяет изменение величины интеграла в (8), а количественной характеристикой положения особенности подынтегральной функции относительно первого нуля функции $\sin\left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2}\right)$ является параметр $\Delta/\lambda = \frac{\chi_1}{\chi_2}$. Таким образом, значение параметра Δ/λ определяет величину $Y_{внеш}$ при изменении ширины щели и/или длины волны.

Заметим, что с увеличением параметра Δ/λ при достаточно большом его значении, когда χ_1 достигает значений порядка и более χ_2 , множитель $\frac{1}{\sqrt{k_o^2 - \chi^2}}$ под интегралом в выражении для $Y_{внеш}$ (8) можно приближённо заменить на $\frac{1}{k_o}$, поскольку конкретное положение интегрируемой особенности начинает мало сказываться на величине интеграла (8). Тогда используя табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} (\sin(ax)/x)^2 dx = \frac{\pi}{2} \cdot |a|,$$

приходим к ожидаемому результату: $Y_{внеш}$ стремится к действительному значению $\frac{1}{Z_o}$ с увеличением Δ/λ .

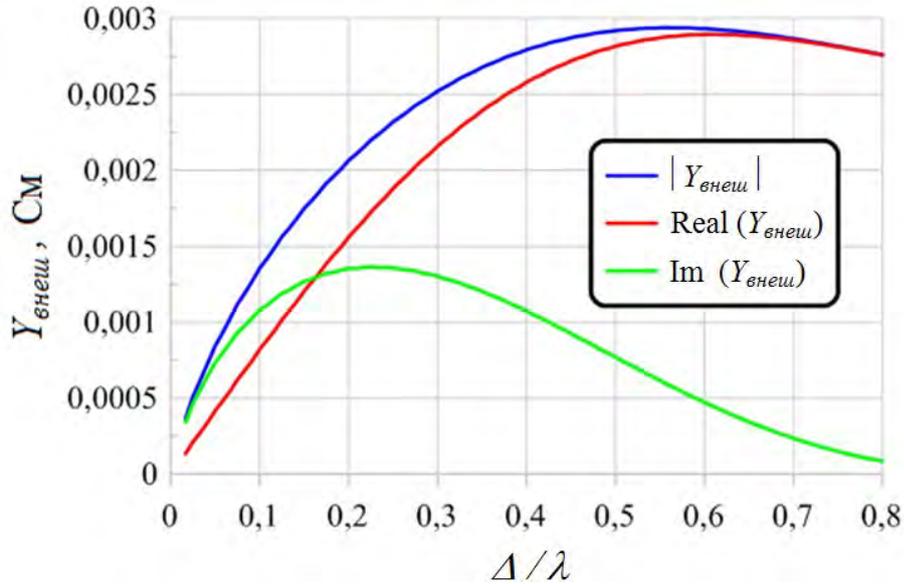


Рисунок 4 – Зависимость величины адмиттанса внешней области, примыкающей ко входу в щель, от электрической ширины щели

Зависимость $Y_{внеш}(\Delta/\lambda)$ была получена численно. Вид зависимости действительной и мнимой частей, а также модуля $Y_{внеш}$ от Δ/λ представлен на рисунке 4. Заметим, что для достаточно широких щелей с $\Delta > 0.8 \cdot \lambda$ величина $Y_{внеш}$ приближается к действительной величине, близкой к обратной для волнового сопротивления свободного пространства $1/Z_0 \approx 0.00265$ См.

Отдельно отметим, что найденные в одномодовом приближении элементы матрицы адмиттансов внутренней области щели $[Y_{внутр}]$ и адмиттанс $Y_{внеш}$ области, внешней по отношению ко входу в щель, не зависят от направлений облучения и приёма, - это следует из приведённого описания процедуры их нахождения.

Выражения для ЭПР щелей

Выражения для угловой зависимости ЭПР щели в полупространствах перед щелью $\sigma_A(\phi)$ и за щелью $\sigma_B(\phi)$ (последнее – для сквозного зазора) получим из следующих соображений. Рассеянные поля найдём как поля эквивалентных поверхностных магнитных токов, наложенных на заматаллизованные вход в щель и выход из неё на площади S отверстия щели длиной L и шириной Δ . Излучение магнитного тока над плоской металлической поверхностью равно излучению магнитного тока с удвоенной поверхностной плотностью $J_{zA}^M = 2 \cdot E_{\tau A}$, либо $J_{zB}^M = 2 \cdot E_{\tau B}$, находящегося в свободном пространстве (с учётом излучения зеркального изображения магнитного тока) [5, 6]. Тогда векторный магнитный потенциал в дальней зоне в направлении под углом ϕ со стороны границы А либо В равен

$$\begin{aligned} A_{z A/B}^M(r, \phi) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \cdot \int_S \left(2 \cdot J_{z A/B}^M \right) \cdot e^{ik_0 r \cdot \cos \phi} dS = \\ &= \frac{J_{z A/B}^M}{2\pi} \cdot L \cdot \Delta \cdot \frac{\sin\left(\frac{k_0 \Delta \cdot \cos \phi}{2}\right)}{\left(\frac{k_0 \Delta \cdot \cos \phi}{2}\right)} \cdot \frac{e^{-ik_0 r}}{r}. \end{aligned}$$

Здесь и далее запись A/B в нижнем индексе для величин обозначает выбор рассеянного поля в полупространстве либо перед входом в щель, либо за выходом из щели, а магнитных токов J_z^M и E_τ полей - в плоскости либо входа А, либо выхода В.

Отсюда следуют выражения для электрического и магнитного полей в дальней зоне. Поскольку $\vec{E}_{расс}(r, \phi) = -\text{rot } A_z^M$, то в дальней зоне имеем $E_{расс \phi} = -ik_0 A_z^M$, $H_{расс z} = \frac{E_{расс \phi}}{Z_0}$. Тогда получаем выражение для ЭПР:

$$\sigma_{A/B} = \frac{k_0^2 \cdot L^2 \cdot \Delta^2}{\pi \cdot Z_0^2} \cdot \frac{|E_{\tau A/B}|^2}{|H_{nz}|^2} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{k_0 \Delta \cdot \cos \phi}{2}\right)}{\left(\frac{k_0 \Delta \cdot \cos \phi}{2}\right)} \right)^2.$$

Как следует из (4), зависимости полей $E_{\tau A}$ на входе в щель и $E_{\tau B}$ на выходе из неё от угла ϕ_0 ,

под которым происходит облучение щели, имеет вид

$$E_{\tau A/B} = U_{A/B} \cdot H_{n_z} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k_o \Delta \cdot \cos \varphi_o}{2}\right)}{\left(\frac{k_o \Delta \cdot \cos \varphi_o}{2}\right)},$$

где для сквозного зазора конечной толщины

$$U_A = \frac{2 \cdot (Y_{AA} + Y_{внеш})}{-(Y_{AA} + Y_{внеш})^2 + Y_{AB}^2}, \quad U_B = \frac{2 \cdot Y_{AB}}{-(Y_{AA} + Y_{внеш})^2 + Y_{AB}^2} \quad (9)$$

для сквозного зазора в бесконечно тонком слое идеального электрического проводника

$$U_A = U_B = -\frac{1}{Y_{внеш}} \quad (10)$$

для канавки

$$U_A = -\frac{2}{Y_{AA} + Y_{внеш}}. \quad (11)$$

Здесь коэффициенты $U_{A/B}$, выражающиеся через элементы матрицы адмиттансов внутренней области щели и адмиттанс внешней по отношению к щели области, не зависят от направления облучения.

Тогда для бистатической ЭПР щели получаем

$$\sigma_{A/B}(\phi_o, \phi) = \frac{k_o^2 \cdot L^2 \cdot \Delta^2}{\pi \cdot Z_o^2} \cdot |U_{A/B}|^2 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{k_o \Delta \cdot \cos \phi_o}{2}\right)}{\left(\frac{k_o \Delta \cdot \cos \phi_o}{2}\right)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{k_o \Delta \cdot \cos \phi}{2}\right)}{\left(\frac{k_o \Delta \cdot \cos \phi}{2}\right)}\right)^2. \quad (12)$$

Таким образом, с помощью выражений (7 - 12) можно вычислить бистатическую диаграмму рассеяния и диаграмму обратного рассеяния для щелей (в последнем случае $\phi_o = \phi$).

Из выражения (12) следует, что для узких щелей, как канавок, так и сквозных зазоров, шириной оценочно до $\Delta \leq \frac{\lambda}{16}$ зависимостью бистатической ЭПР от направлений облучения и приёма можно пренебречь. Соответственно, и моностатическая ЭПР таких узких щелей практически постоянна при вариации направления визирования. Аналогично для более широких щелей в угловой области около нормали, где функции вида $\sin(x)/x$ для угла облучения и/или приёма в (12) мало отличаются от единицы, ЭПР щели в первом приближении постоянна при соответствующем изменении направлений облучения и/или приёма. Для щелей шириной порядка и более половины длины волны угловые зависимости бистатической и моностатической ЭПР щелей становятся существенными – в частности, вокруг направления по нормали к поверхности щели формируется выраженный максимум.

На рисунке 5 приведены вычисленные в соответствии с выражениями (7 - 12) частотные зависимости погонной моностатической ЭПР полых канавки (синяя кривая) и сквозного зазора (красная кривая) шириной $\Delta = 4$ мм и глубиной $D = 40$ мм в диапазоне частот от 1 до 25 ГГц при падении волны на щель по нормали ко входу.

Из рисунка 5 видно, что при изменении частоты погонная ЭПР сквозного зазора осциллирует в существенно более узких пределах, чем для канавки. В частности, минимумы ЭПР канавки очень глубоки. Видно также, что в области низких частот, где ширина канавки и узкого зазора много меньше длины волны $\Delta \ll \lambda$, максимальные значения погонной ЭПР относительно медленно растут с ростом частоты (и, следовательно, отношения Δ/λ) от уровней чуть больше 5 м^2 для канавки и приблизительно 1.3 м^2 для сквозного зазора (то есть в четыре раза меньше, чем у канавки). Как следует из рисунка 5, значение максимума погонной ЭПР канавки достигает уровня 6 м^2 приблизительно при $\Delta = 0.2 \cdot \lambda$. У сквозного зазора увеличение максимальной погонной ЭПР с увеличением частоты происходит заметно быстрее.

Минимальные и максимальные значения эффективной поверхности рассеяния узких полых канавок

Помимо общих выражений для ЭПР узких полых щелей (7 - 12), получим на основе этих выражений два полезных соотношения для оценок погонной ЭПР канавок в предельных случаях их минимальной и максимальной заметности. Соотношения имеют вид закона изменения погонной ЭПР узкой полых канавки вблизи минимальных значений и числа – оценки максимальной погонной ЭПР узких канавок. Параметрами закона изменения ЭПР канавки вблизи минимальных значений являются

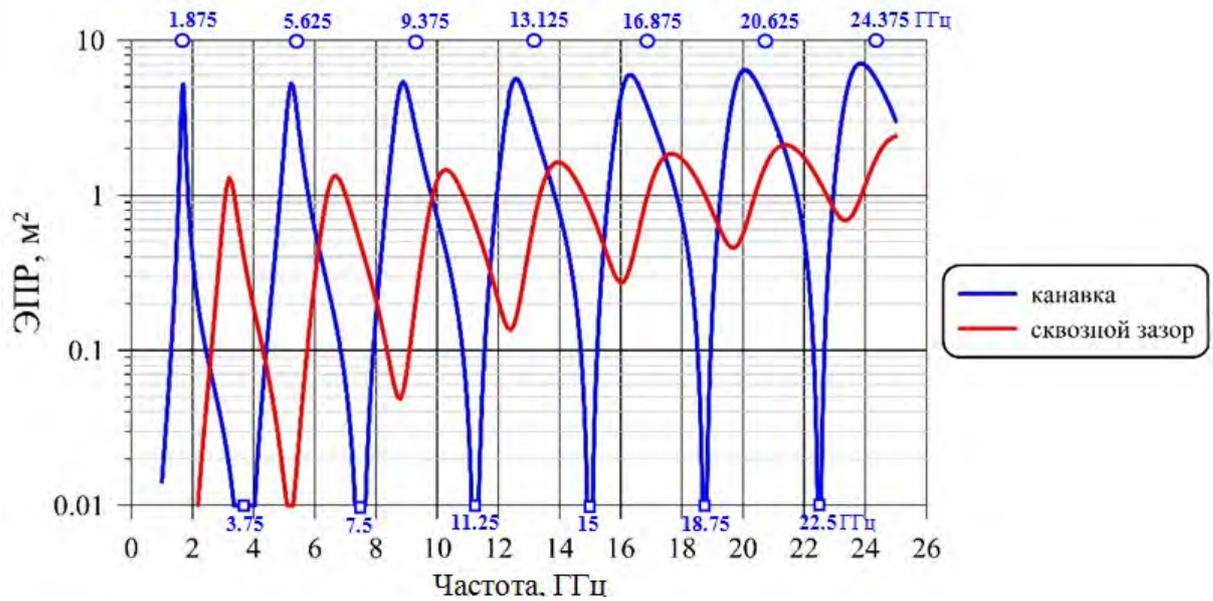


Рисунок 5 – Частотные зависимости погонных моностатических ЭПР полых канавки и сквозного зазора шириной 4 мм и глубиной 40 мм в направлении нормали ко входу в щель

длина волны, ширина и глубина канавки. Оцениваемое максимальное значение погонной ЭПР узких канавок достигается при вариации тех же параметров, но является общим на разных частотах, а также при различных ширине и глубине канавок, но при выполнении условия, что ширина канавки много меньше длины волны.

Физической причиной того, что канавка становится незаметной на фоне окружающей её металлической поверхности с нулевым импедансом $Z = 0$, является стремление модуля входного импеданса канавки к нулю $|Z_{AA}| \rightarrow 0$ (или, что то же, стремление модуля входного адмиттанса канавки к бесконечности $|Y_{AA}| \rightarrow \infty$). Таким образом, достижение минимума ЭПР канавки определяется исключительно свойствами внутренней области канавки. При этом по длине канавки укладывается целое число полуволн свободного пространства, или, что то же, целое число периодов стоячей волны

$$D_{\min}(n) = \frac{n \cdot \lambda}{2}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Если при $n = 0$ глубина канавки становится исчезающе малой, то есть канавка исчезает фактически, то при $n \neq 0$ короткое замыкание на дне канавки переносится на её вход. Частоты, на которых для канавки выполняется условие (13), отмечены на рисунке 5 квадратами. Видно, что положение квадратов точно соответствует минимумам ЭПР канавки.

В некоторой окрестности минимумов ЭПР модуль входного адмиттанса канавки $|Y_{AA}|$ остаётся значительным по сравнению с адмиттансом внешней области, примыкающей ко входу в канавку $|Y_{внеш}|$: $|Y_{AA}| \gg |Y_{внеш}|$. Тогда, как следует из (6), можно из общего выражения получить приближённую формулу ЭПР в области её малых значений для узких полых канавок. Из (6) получаем

$$E_{\tau A} = 2i \cdot Z_o \cdot \operatorname{tg}(k_o D) \cdot H_{no}.$$

В окрестности минимумов ЭПР малое значение тангенса можно заменить аргументом тангенса в радианах, так что

$$E_{\tau A} = 2i \cdot Z_o \cdot k_o D_n \cdot H_{no},$$

где $D_n = D - D_{\min}(n)$ - отклонение глубины от значения, соответствующего n -ому минимуму ЭПР канавки.

Тогда для канавки шириной много меньше длины волны $\Delta \ll \lambda$ из (12) следует выражение для погонной ЭПР в области её малых значений

$$\hat{\sigma}_{nog} = 64\pi^3 \cdot \frac{\Delta^2 \cdot D_m^2}{\lambda^4} \quad (14)$$

Здесь принято, что все отношения вида $\sin x/x$, входящие в (12), можно положить равными единице. Тогда (14) представляет собой единую формулу для оценок погонной как бистатической, так и моностатической ЭПР узких полых канавок в окрестности минимумов ЭПР.

Особо выделим факт, что погонная ЭПР узких полых канавок в области малых интенсивностей рассеяния весьма сильно зависит от длины волны, ширины и глубины канавки, а именно ЭПР обратно пропорциональна четвёртой степени длины волны $\hat{\sigma}_{noz} \sim 1/\lambda^4$, пропорциональна квадрату ширины канавки $\hat{\sigma}_{noz} \sim \Delta^2$ и квадрату "приведённой" глубины канавки $\hat{\sigma}_{noz} \sim D_m^2$. Разумеется, для канавки длиной L в окрестности минимума ЭПР получаем оценку

$$\sigma = 64\pi^3 \cdot \frac{\Delta^2 \cdot D_m^2 \cdot L^2}{\lambda^4} \quad (15)$$

Отметим, что формула (15) совпадает с приведённой в [4] так называемой упрощённой формулой ЭПР узких канавок, полученной в предположении малого возмущения структуры магнитного поля над входом в канавку.

В более слабом предположении, что ширина канавки меньше или равна половине длины волны $\Delta \leq \frac{\lambda}{2}$, в формулах (14), (15) следует оставить два квадрата функций вида $\sin(x)/x$, описывающие зависимость ЭПР от углов облучения и приёма, как и в (12).

Максимальные значения ЭПР канавок достигаются, наоборот, при значительном модуле входного импеданса канавки, что делает её сильно выделяющейся на фоне окружающей поверхности металлического объекта. Принципиально модуль входного импеданса канавки обращается в бесконечность $|Z_{AA}| \rightarrow \infty$ ($|Y_{AA}| \rightarrow 0$) при $|tg(k_o D)| \rightarrow \infty$, что имеет место при глубинах канавки, равных половине плюс целое число периодов стоячей волны:

$$D = \frac{\lambda}{4} + \frac{m \cdot \lambda}{2}, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

При вариации длины волны и/или глубины канавки в окрестности значений, для которых выполняется условие (16), в канавке формируется такая стоячая волна, у которой на входе в канавку модуль напряжённости магнитного поля $|H_z|$ стремится к минимуму, а электрического $|E_\tau|$ - к максимуму, что и соответствует росту $|Z_{AA}| \rightarrow \infty$ (уменьшению $|Y_{AA}| \rightarrow 0$). При указанной структуре стоячей волны для достижения $|H_z|$ на входе в канавку величины порядка $|H_{над z}|$ должна будет существенно увеличиться амплитуда стоячей волны. Это означает, что в канавке будет иметь место резонанс стоячей волны. Обусловленное резонансом увеличение поля $|E_{\tau A}|$ на входе в канавку означает рост интенсивности рассеяния канавкой.

Вместе с тем из (6) следует, что при малом $|Y_{AA}| \rightarrow 0$ в окрестности резонанса стоячей волны определяющее влияние на величину $|E_{\tau A}|$ оказывает адмиттанс внешней области $Y_{внеш}$. Заметим, что на рисунке 5 частоты обращения модуля входного импеданса канавки в бесконечность, определяемые в соответствии с (16) и помеченные кружками, находятся в окрестности, но всегда несколько правее максимумов ЭПР канавки.

В соответствии с (6) максимум $|E_{\tau A}|$ и, соответственно, максимум ЭПР канавки достигается при минимуме $|Y_{AA} + Y_{внеш}|$. Адмиттанс внешней области $Y_{внеш}$ имеет емкостной характер, с ненулевыми действительной и мнимой частями, а у канавки адмиттанс Y_{AA} чисто мнимый (с нулевой действительной частью), при мнимой части либо индуктивного (левее от частоты, соответствующей $|Y_{AA}| = 0$), либо емкостного характера (правее от этой частоты). Отсюда понятно, что адмиттанс канавки, будучи индуктивным, компенсирует мнимую часть адмиттанса внешней области именно при частоте, меньшей соответствующей $|Y_{AA}| = 0$.

Более точно, максимальное значение $|E_{\tau A}|$ достигается в окрестности частоты, на которой сумма входного адмиттанса канавки Y_{AA} и мнимой части внешнего импеданса $Y_{внеш}$ переходит через ноль:

$$Im(Y_{AA} + Y_{внеш}) = 0 \quad (17)$$

Однако поскольку $Re(Y_{внеш})$ растёт с ростом частоты при малой ширине канавки (рисунок 4), то частота достижения минимума $|Y_{AA} + Y_{внеш}|$ несколько смещена в сторону меньших частот по сравнению с той, на которой выполняется (17). Вместе с тем для узких канавок $\Delta \ll \lambda$ в окрестности частоты выполнения (17) величина $Im(Y_{AA} + Y_{внеш})$ меняется очень быстро, так что последним из указанных смещений по частоте можно пренебречь.

В соответствии с (8), действительная часть $Y_{внеш}$ при малых $\Delta \ll \lambda$ может быть приближена

интегралом

$$\operatorname{Re}(Y_{\text{внеш}}) \approx \frac{k_o \cdot \Delta}{\pi \cdot Z_o} \cdot \int_0^{k_o} \frac{1}{\sqrt{k_o^2 - \chi^2}} d\chi \quad (18)$$

Действительно, поскольку первый ноль функции

$$\left(\sin \left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2} \right) / \left(\frac{\chi \cdot \Delta}{2} \right) \right)^2 \quad (19)$$

много больше k_o , то эта функция может быть приближена единицей в интервале интегрирования $[0, k_o]$. Интеграл в правой части (18) табличный вида $\operatorname{arcsin} \frac{\chi}{k_o}$. Подставляя пределы, окончательно получаем для канавок:

$$\operatorname{Re}(Y_{\text{внеш}}) \approx \frac{k_o \cdot \Delta}{2 \cdot Z_o} \quad (20)$$

Тогда максимальное E_{TA} можно оценить как

$$E_{TA} = \frac{2 \cdot H_{no}}{\operatorname{Re}(Y_{\text{внеш}})} = \frac{4 \cdot Z_o \cdot H_{no}}{k_o \cdot \Delta}.$$

Пренебрегая в (12) угловой зависимостью ЭПР при малой ширине канавки по сравнению с длиной волны, получаем единую оценку для максимальной погонной эффективной поверхности как двухпозиционного, так и обратного рассеяния для узкой полой канавки:

$$\hat{\sigma}_{noz} = \frac{16}{\pi} \approx 5.1 \text{ м}^2 \quad (21)$$

Значение (21) не зависит ни от частоты (длины волны), ни от ширины и глубины канавки, то есть является единой оценкой для разных канавок на разных частотах, в том числе для максимумов ЭПР, имеющих место на разных частотах для одной канавки, но при выполнении условия ширина канавки много меньше длины волны $\Delta \ll \lambda$.

С ростом ширины канавки в длинах волн $\operatorname{Re}(Y_{\text{внеш}})$ падает, поскольку функция (19) будет всё заметнее уменьшаться по сравнению с единицей в правой части интервала интегрирования $[0, k_o]$. Поэтому максимум погонной ЭПР канавок с ростом Δ/λ будет иметь тенденцию к увеличению, хотя и остаётся постоянным на фиксированной частоте для канавок разной глубины. Как видно из рисунка 5, величина 5.1 м^2 соответствует уровню, с которого в приведённом примере начинает постепенно увеличиваться максимум погонной ЭПР канавки с увеличением частоты, и соответственно, увеличением ширины канавки в длинах волн Δ/λ .

Экспериментальная проверка точности и определение границ применимости выражений для эффективной поверхности рассеяния канавок

Точность вычисления ЭПР щелей с помощью полученных выражений (7 - 12) была верифицирована сравнением с результатами вычислений диаграмм обратного рассеяния (ДОР) канавок в металлической пластине методом поверхностных интегральных уравнений с помощью пакета программ для электродинамического моделирования FEKO [9]. Одновременно оценивался предел по ширине канавки, до которого использование выражений, полученных в рамках однодогового приближения, обеспечивает высокую точность вычислений.

Модель в виде металлической пластины шестиугольной формы с канавкой посередине, которая была подготовлена для расчётов в FEKO, представлена на рисунке 6. Острые углы пластины составляют 80° , диаграммы рассчитывались в плоскости визирования, проходящей через вершины острых углов и нормаль посередине пластины. Наличие углов позволяет уменьшить влияние дифракционных эффектов, обусловленных геометрией пластины, на ДОР модели при приближении углов визирования к скользящим. Вектор напряжённости электрического поля лежал в плоскости визирования, размеры прямоугольной части пластины составляли 300×300 мм. Заметим, что в обратном рассеянии от пластины в малой угловой окрестности направления нормали к пластине доминирует вклад от поверхности пластины как таковой. Кроме того, в близких к скользящим направлениях проявляется влияние дифракционных эффектов от рассеяния поверхностных токов на острых углах пластины и общее уменьшение уровня рассеяния пластиной из-за того, что преимущественно продольные токи на пластине не излучают в направлении, в котором они ориентированы (смотри подробнее, например, [10]). В остальных направлениях вклад канавки в обратное рассеяние от модели выходит на первый план.

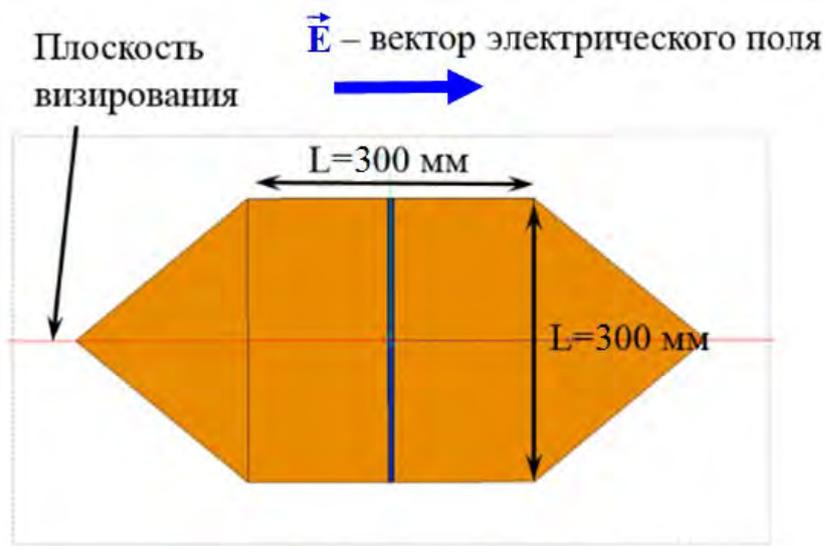


Рисунок 6 – Модель в виде металлической пластины с канавкой, подготовленная в FEKO

На рисунках 7а,б сплошными кривыми представлены ДОР пластины с канавкой, рассчитанные в FEKO, пунктирными кривыми – собственные ДОР канавок, рассчитанные в соответствии с выражениями (7 - 12). При этом производился пересчёт от погонной ЭПР канавки, рассчитанной по (7 - 12), до ЭПР канавки конкретной длины. В первой серии расчётов, результаты которой представлены на рисунке 7а, диаграммы рассчитаны на частоте 10 ГГц для канавок одинаковой глубины 4 мм, но разной ширины. Красным цветом на рисунке 7а показаны диаграммы для канавки шириной 4 мм, синим – шириной 10 мм, зелёным – шириной 15 мм (при этом ширина канавки равна половине длины волны), чёрным – шириной 18 мм.

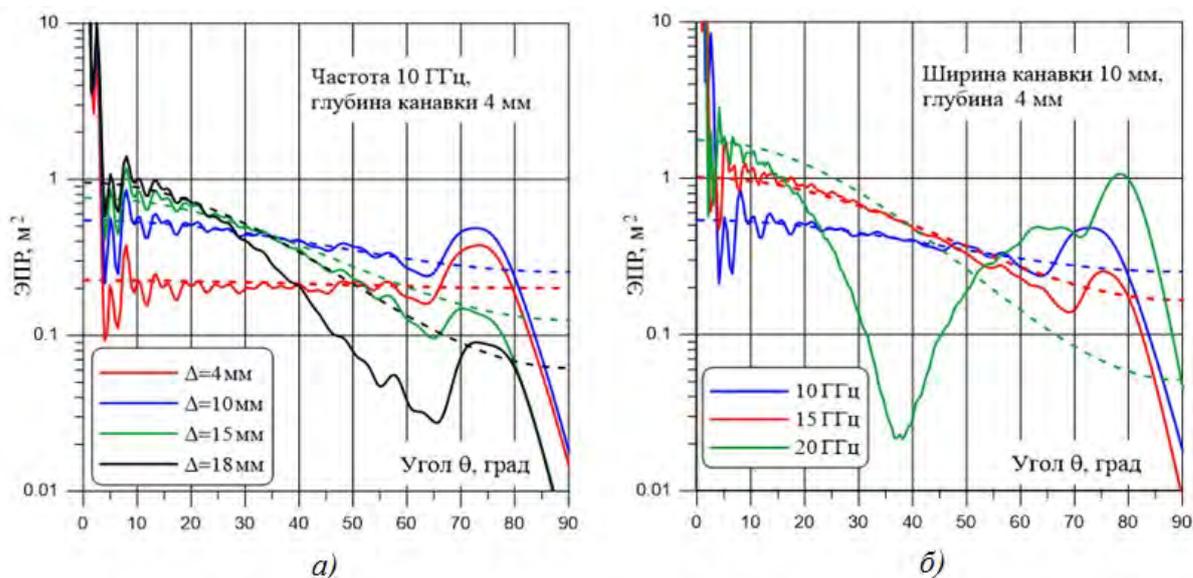


Рисунок 7 – Диаграммы обратного рассеяния полых канавок. Сплошные кривые – расчёт в FEKO, пунктирные – расчёт по формулам (7 - 12): а) – переменная ширина канавок на постоянной частоте 10 ГГц и при одинаковой глубине канавок 4 мм; б) – переменная частота при постоянных ширине 10 мм и глубине 4 мм канавки

Результаты второй серии расчётов представлены на рисунке 7б. Здесь диаграммы рассчитаны для канавки с одним и тем же поперечным сечением с шириной $\Delta = 10$ м и глубиной $D = 4$ мм, но на разных частотах. Красным цветом на рисунке 7б показаны диаграммы на частоте 10 ГГц, синим – на частоте 15 ГГц, зелёным – на частоте 20 ГГц. Здесь ширина канавки равна половине длины волны при частоте 15 ГГц.

Как следует из сравнения пар соответствующих кривых на рисунках 7а,б, расчёты диаграмм рассеяния канавок по полученным в данной работе выражениям (7 - 12) точны при ширине канавки от

много меньше длины волны до половины длины волны включительно $\Delta \leq \frac{\lambda}{2}$, то есть до порога возбуждения волноводной моды в щели, распространяющейся за счёт переотражений между её длинными стенками.

Также из рисунков 7а,б видно, что при ширине канавки больше половины длины волны расчёт по (7 - 12) даёт точные значения моностатической ЭПР в угловой окрестности нормали ко входу в канавку, однако при дальнейшем отклонении направления визирования от нормали ошибка расчёта по (7 - 12) становится значительной и растёт тем быстрее, чем шире канавка.

Результаты ещё одной проверки точности выражений (7 - 12) для погонной ЭПР щелей представлены на рисунке 8. Здесь на графике для частоты 10 ГГц и обратного рассеяния по нормали ко входу в щель показаны зависимости погонной ЭПР трёх щелей от их глубины D , рассчитанные в соответствии с (7 - 12). Зависимости рассчитаны для канавок шириной $\Delta = 3$ мм (синяя кривая) и $\Delta = 5$ мм (зелёная кривая), а также для сквозного зазора шириной $\Delta = 4$ мм (последовательность заполненных красных кружков). Расчёт был верифицирован численным определением ЭПР соответствующих щелей на шестиугольной пластине с помощью пакета ФЕКО, при последующем пересчёте ЭПР щелей конкретной длины к их погонной ЭПР. Рассчитанные в ФЕКО значения погонной ЭПР двух канавок и сквозного зазора помечены значками на рисунке 6: квадратами для канавки шириной $\Delta = 3$ мм, треугольниками для канавки шириной $\Delta = 5$ мм и незаполненными кружками для сквозного зазора шириной $\Delta = 4$ мм. Как следует из рисунка 8, тестирование показало высокую точность расчётов погонной ЭПР щелей по формулам (7 - 12), в том числе для канавок - в окрестностях резонансов при $D = \frac{\lambda}{4} + \frac{m \cdot \lambda}{2}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

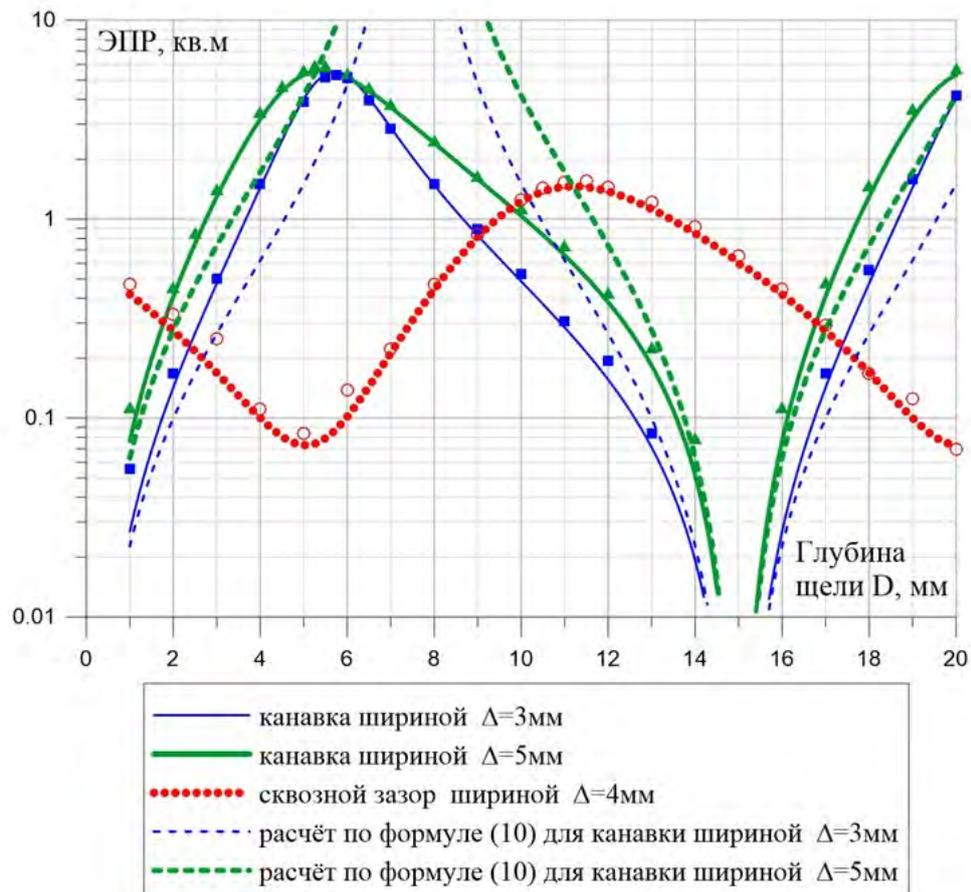


Рисунок 8 – Зависимости от глубины щели для погонных моностатических ЭПР полых канавок и сквозного зазора в направлении нормали ко входу в щель

Результаты расчётов погонной ЭПР канавок в зависимости от глубины по приближённой формуле (14) в окрестностях минимумов ЭПР представлены на рисунке 8 пунктирными кривыми синего и зелёного цвета для канавок шириной, соответственно, 3 и 5 мм. Видно, что при вариации глубины D расчёт погонной ЭПР канавки по (14) обеспечивает высокую точность в непосредственной близости от минимумов ЭПР канавки при $D_{\min}(n) = \frac{n \cdot \lambda}{2}$, причём по обе стороны от значения глубины, равного целому числу полуволн, то есть и при емкостном, и при индуктивном характере входного адмиттанса

канавки. Точность расчёта погонной ЭПР канавки по (14) остаётся удовлетворительной до значений глубины порядка $|D - D_{\min}(n)| \sim \lambda/10$.

Представленные на рисунке 8 результаты расчётов подтверждают, что максимумы погонной ЭПР для канавок шириной 3 мм и 5 мм достигаются при индуктивном характере входного адмиттанса канавки на участке левее максимума функции $\text{tg}(k_0 D)$, соответствующего $|Y_{AA}| = 0$. Максимальное достигаемое значение погонной ЭПР для канавки шириной $\Delta = 3$ мм ($\Delta = 0.1\lambda$) чуть превышает 5 м^2 , а для канавки шириной $\Delta = 5$ мм ($\Delta \approx 0.17\lambda$) приближается к 6 м^2 .

Пропорциональность ЭПР щели квадрату её длины подтверждается точностью пересчёта от погонной к реальной ЭПР щели (смотри рисунки 7а,б), и, наоборот, от реальной ЭПР к погонной (рисунок 8). Одновременно это доказывает справедливость первого сделанного в данной работе предположения о доминировании вклада от двумерной составляющей в поперечном распределении полей и токов вдоль щели при рассеянии щелью в плоскости, перпендикулярной щели. Действительно, именно эта составляющая даёт синфазный вклад в рассеянное поле, линейно увеличивающийся с увеличением длины щели, что приводит к квадратичному росту ЭПР щели с увеличением её длины, как в формуле (1).

Целесообразно отметить, что расчёты в ФЕКО показали графическое совпадение ДОР канавки при открытых и закрытых металлическими пластинами концах канавки. Это ещё раз подтвердило доминирование вклада двумерной составляющей в распределении полей и токов вдоль щели в поле рассеяния щелью. При этом конкретный вид возмущения распределений полей и токов на концах щели по сравнению с распределением, характерным для двумерной задачи, не имеет значения.

Справедливость второго сделанного в данной работе предположения о применимости одномодового приближения подтверждается точностью расчётов рассеяния щелями с шириной до половины длины волны, смотри рисунки 7а,б. Существенно, что, как следует из приведённых на рисунке 8 результатов тестирования выражений (7 - 12), можно пренебрегать не только возбуждением высших типов волн в объёме щели, но и наличием квазистатических особенностей напряжённости электрического поля на кромках щели. В этой связи отдельно укажем на глубину минимумов погонной ЭПР канавок шириной 3 и 5 мм при глубине канавок $D = 15$ мм, равной половине длины волны. Однако эти канавки являются достаточно существенными углублениями, имеющими квазистатические особенности электрического поля на входных кромках. Этот результат доказывает справедливость одномодового приближения в том его аспекте, что квазистатические особенности на кромках щели излучают, во всяком случае, пренебрежимо мало.

Отметим, что интерпретация формирования предельных значений ЭПР канавок в этой работе как случаев "трансляции" короткого замыкания со дна на вход канавки в случае минимума ЭПР и резонансов стоячей волны в случае максимума ЭПР согласуются с тем фактом, что размах осцилляций частотной зависимости ЭПР у сквозного зазора меньше, чем у канавки. Действительно, из физических соображений ясно, что "закоротки" входного отверстия сквозного зазора принципиально не может быть, а резонансы в сквозном зазоре менее добротные из-за дополнительных потерь на излучение через выходное отверстие.

5. Заключение

В работе получено аналитическое решение задачи рассеяния прямыми, полыми, узкими по сравнению с длиной волны щелями в плоскости, перпендикулярной щели, где интенсивность рассеяния максимальна. Важным новым элементом решения является аналитическое выражение для адмиттанса внешней области, примыкающей ко входу в щель. Получены выражения для эффективной поверхности двухпозиционного и обратного рассеяния щелями в виде канавок, либо сквозных зазоров.

В предположении справедливости одномодового приближения поле внутри щелей представлено как встречное движение ТЕМ-волн, и определяется через постоянные составляющие падающего и рассеянного полей в отверстиях щелей. Полагалось также, что в поперечных сечениях по длине щелей сохраняется двумерная, как при рассеянии на бесконечной щели, составляющая полей и токов. Экспериментальная проверка показала справедливость сделанных предположений и точность вычислений по полученным формулам, вплоть до ширины щели, равной половине длины волны – для более широких щелей одномодовое приближение теряет справедливость. На доминирование суммы синфазных вкладов от двумерной составляющей полей и токов по всей длине щели указывает пропорциональность эффективной поверхности рассеяния щели квадрату её длины.

Отдельно из общих выражений получена оценочная формула для ЭПР щелей в виде канавок в окрестности минимумов ЭПР. Достоинством этой формулы является явное выражение для ЭПР через физические параметры задачи, что делает её особенно полезной при расчётах и анализе "отклика" объекта на облучение. Была получена также и, наоборот, не зависящая от физических параметров

задачи величина максимума погонной ЭПР канавки шириной много меньше длины волны, равная $16/\pi \approx 5\text{ м}^2$. Достаточная точность этой оценки сохраняется до ширины канавки $0,2\lambda$, при которой максимум ЭПР канавки достигает 6 м^2 .

Список литературы

- [1] Кобак В.О. Радиолокационные отражатели. - М.: Советское радио, 1975. - 248 с.
- [2] Radar Cross Section / E.F. Knott, J.F. Shaeffer, M.T. Tuley. - 2nd ed., SciTech Publishing, Inc., USA. 2004. - 637 p.
- [3] Dominek A K, Shamansky H T and Wang N 1989 Scattering from Three-Dimensional Cracks // IEEE Trans. Antennas Propag., 1989, 37(5) p 586-591.
- [4] Лебедев А.М., Фурманова Т.А., Федоренко А.И., Краснолобов И.И. Формулы для оценки эффективной поверхности рассеяния узких канавок и сквозных зазоров // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал], 2018, № 5.
- [5] Сазонов Д.М. Антенны и устройства СВЧ. - М.: Высшая школа, 1988. - 434 с.
- [6] Computational Methods For Electromagnetics // A.F. Peterson, L.R. Scott, R. Mittra. - IEEE Inc., USA. - 1998.
- [7] Бодров В В, Сурков В И 1994 Математическое моделирование устройств СВЧ и антенн – М.: Изд-во МЭИ, 1994. - 92 с.
- [8] Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1992. - 416 с.
- [9] Feko, <https://www.altair.com>.
- [10] Лебедев А.М., Фурманова Т.А. Уменьшение дифракционного шума металлической пластины путём подавления волн, распространяющихся вдоль её краёв // IV Всероссийская Микроволновая конференция. Сборник трудов. – М.: ИПЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2016. - С.442–447.

ESTIMATION OF INTENSITY OF SCATTERING FROM NARROW HOLLOW SLOTS WITH ACCOUNTING FOR THE EXTERNAL REGION ADMITTANCE

К.М. Baskov¹, I.I. Krasnolobov¹, A.M. Lebedev^{*1}, V.N. Semenenko¹,
Т.А. Furmanova¹,

¹ Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia
* itae@itae.ru

Abstract

An analytical expression was obtained for the admittance of the external region adjacent to the entrance of the slot. Using this result, analytical expressions were obtained for the intensity of two-position and backward scattering from the hollow, straight slots, which are narrow in comparison with the wavelength and in the form of grooves or through-thickness gaps in a locally plane surface of a metal object. Accounting for the admittance of the external region resulted in high accuracy of scattering field calculation, including in the vicinity of the minima and maxima of intensity of scattering from the groove. Based on analytical formulas for the scattering intensity, the evaluation expressions for the minimum and maximum values of the grooves' radar cross section were obtained. It was shown that in the vicinity of minimum the radar cross section of narrow grooves strongly depends on the frequency, as well as on the width and depth of the groove, the explicit expression of this dependence was revealed. On the contrary, the maxima of the narrow grooves' radar cross section, achieved at resonances of a standing wave inside the groove, was estimated as a single value $16/\pi \approx 5 \text{ sm}$ per meter of length and in a first approximation it does not depend on the frequency, width and depth of the groove. The obtained expressions were verified by comparing the results of calculations of backscattering diagrams of slots using the method of surface integral equations and using the expressions obtained in this work.

Key words: slot, groove, through-thickness gap, radar cross section, admittance, single-mode approximation

**ПЕРЕВОД И КОММЕНТАРИИ СТАТЬИ ПЁРСЕЛЛА
«ВЕРОЯТНОСТИ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА
РАДИОЧАСТОТАХ» (E. M. PURCELL. SPONTANEOUS
EMISSION PROBABILITIES AT RADIO FREQUENCIES //
PHYSICAL REVIEW, 69, 681, (1946))
(МЕТОДИЧЕСКАЯ ЗАМЕТКА)**

А.П. Виноградов * ¹, А.А. Пухов¹

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 25.12.2023

Одобрена после рецензирования 28.12.2023

Принята к публикации 18.01.2024

Аннотация

Дан перевод работы Пёрселла 1946 года. Показана важность этой работы для дальнейших исследований в области квантовой оптики.

Ключевые слова: спонтанное излучение, усиленное спонтанное излучение

EDN FBQSBА

doi:[10.24412/2949-0553-2023-68-38-40](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2023-68-38-40)

Почти восемьдесят лет появилась короткая статья Э.М. Пёрселла, сыгравшая огромную роль в квантовой оптике и плазмоне. Статья Пёрселла, в которой впервые был введен коэффициент увеличения скорости испускания осциллятора в резонаторе по сравнению с его скоростью спонтанного излучения в свободное пространство, является одной из самых коротких (один абзац) и одновременно активно цитируемой в современной физике работ. По данным ISI Web of Knowledge на 2011 год, статья цитировалась почти 1700 раз. Заметим, что за рубежом звучание фамилии ближе к «Пёрселл», а не к «Парселл», последнее часто встречается в русскоязычной литературе наряду с первым (см. например, [1]).

Ниже предлагается перевод этой статьи [2] на русский язык и приведены некоторые комментарии и ссылки, облегчающие понимание этой важной пионерской работы.

Вероятности спонтанного излучения на радиочастотах Э. М. Пёрселл

Для переходов ядерного магнитного момента на радиочастотах интенсивность спонтанного излучения, рассчитанная по формуле (см. *Комментарий 1*)

$$A_\nu = (8\pi\nu^2/c^3)h\nu(8\pi^3\mu^2/3h^2)sec^{-1},$$

настолько мала, что этот процесс неэффективен для приведения спиновой системы в тепловое равновесие с окружающей средой. При $300^\circ K$ на частоте $\nu = 10^7 sec^{-1}$, и μ , равному одному ядерному магнетону, соответствующее время релаксации составит 5×10^{21} секунд!

Однако для системы, связанной с резонансной электрической цепью, множитель $8\pi\nu^2/c^3$ (см. *Комментарий 2*) больше не дает правильное число осцилляторов излучения на единицу объема в единичном диапазоне частот, существует только один осциллятор в диапазоне частот $\nu/Q - \nu/Q \leq \nu \leq \nu + \nu/Q$, который можно ассоциировать с цепью (см. *Комментарий 2*). При этом вероятность

* Автор, ответственный за переписку: Алексей Петрович Виноградов, a-vinogr@yandex.ru

спонтанного излучения увеличивается, а время релаксации уменьшается в $f = 3Q\lambda^3/4\pi^2V$ раз, где V — объем резонатора (см. *Комментарий 3*).

Если a — характерный размер цепи, так что $V \sim a^3$, а δ — глубина скин-слоя на частоте ν , то $f \sim \lambda^3/a^2\delta$. Для цепи с частотной расстройкой $f \sim \lambda^3/a^3$, а при $a < \delta$ можно показать, что $f \sim \lambda^3/a\delta^2$. Если мелкие металлические частицы диаметром 10^{-3} см смешать с ядерно-магнитной средой при комнатной температуре, то спонтанное излучение должно установить тепловое равновесие за время порядка минуты при $\nu = 10^7 \text{ sec}^{-1}$.

Комментарий 1

Формула $A_\nu = (8\pi\nu^2/c^3)h\nu(8\pi^3\mu^2/3h^2)\text{sec}^{-1}$ — это формула коэффициента Эйнштейна, которая эквивалентна «золотому правилу» Ферми [3] для вероятности перехода в единицу времени, при этом скорость спонтанного излучения в вакуум равна $\gamma^{(rad)} = \frac{4\pi}{3}\Pi_0(\omega)\Omega^2(\omega)$, где Ω^2 — квадрат частоты Раби осциллирующей соответствующей моды/ Множитель $(8\pi\nu^2/c^3)$ соответствует плотности числа состояний фотонов (электромагнитных волн) в свободном пространстве $\Pi_0(\omega)$. Его появление связано с тем, что спонтанное излучение осциллятора с матричным элементом дипольного момента μ при спонтанном излучении возможно только при учете взаимодействия осциллятора с бесконечным резервуаром мод свободного пространства [4].

При взаимодействии лишь с одной модой резонатора возбужденный атом не переходит из возбужденного состояния в основное. Вместо этого наблюдаются периодические колебания Раби населенности уровня атома [5]. Переход возбужденного атома в основное состояние возможен только при учете взаимодействия с резервуаром [2, 6].

Сам коэффициент Пёрселла f пропорционален локальной плотности числа состояний фотонов. В случае свободного пространства это $\Pi_0(\omega)$, а добавление в систему резонатора увеличивает ее до $\Pi_0(\omega) + \Pi_R(\omega)$, где $\Pi_R(\omega)$ равен $2\pi Q/\omega$.

Комментарий 2

Плотность числа состояний $\Pi(\omega)$ есть число состояний в единичном интервале частот и в единичном объеме вакуума (см. [6, 7]) и выражается простой формулой

$$\Pi(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$$

где $\omega_{a,\mathbf{k}}$ — собственные частоты мод в системе. В случае свободного пространства [7]

$$\Pi(\omega) = V\omega^2/3\pi^2c^3.$$

И что для нас важно, что скорость спонтанного излучения $\gamma^{(rad)}$ связана с плотностью числа состояний как

$$\gamma^{(rad)} = 2\pi \sum_{\mathbf{k}} \Omega_{a,\mathbf{k}}^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_\sigma)$$

При наличии одномодового резонатора к плотности состояний в вакууме добавляется мода этого резонатора, и появляется пик превышения над плотностью числа мод в свободном пространстве.

Комментарий 3

Заметим, что излучение происходит именно, в основном, в собственную моду резонатора, а не в моды свободного пространства. Примечательно, что избирательность происходит не только по частоте, но и по диаграмме направленности спонтанного излучения атома. Нарушение симметрии диаграммы направленности возникает из-за того, что спонтанное излучение осциллятора происходит преимущественно в резонатор, симметрия которого отлична от симметрии свободного пространства.

В случае, если атом подвергается постоянной накачке, то в моде резонатора будет запасаться энергия. Например, для высокочастотного резонатора это приведет к возникновению усиленного спонтанного излучения (ASE — amplified spontaneous emission). При этом наличие стимулированного излучения не требуется.

Самым ярким примером возникновения ASE в системе без стимулированного излучения является «рамановский лазер», который генерирует усиленное спонтанное излучение даже при наличии только тепловых колебаний молекул. Только развитие колебательной неустойчивости в раман-активных молекулах под действием волны накачки и ASE волны на стоксовской частоте к появлению когерентных

колебаний молекул и к зависимости вероятности излучения стоксовской волны от ее интенсивности. Это и есть рамановская аналогия стимулированного излучения.

Список литературы

- [1] Ораевский А.Н. Спонтанное излучение в резонаторе // Успехи физических наук. 1994. Т. 164. С 415-427.
- [2] Purcell E. M. Spontaneous emission probabilities at radio frequencies // Physical Review. 1946. V. 69. P. 681.
- [3] Fermi E. Quantum theory of radiation // Rev. Mod. Phys. 1932. V. 4. P. 87-132.
- [4] V.F. Weisskopf, E.P. Wigner. Calculation of the natural brightness of spectral lines on the basis of Dirac's theory. Z. Phys. V. 63, 54-73, 1930.
- [5] Rabi, I.I. Space quantization in a gyrating magnetic field. Phys. Rev. V 51, 652-654, 1937.
- [6] Гайтлер В. Квантовая теория излучения. 1956. 490 с.
- [7] Квантовая наноплазмоника / Андрианов Е. С. , Виноградов А. П., Дорофеев А. В., Зябловский А. А., Лисянский А. А., Пухов А.А. 2015. 368 с.

COMMENTS TO AND TRANSLATION INTO RUSSIAN OF PURCELL'S ARTICLE "SPONTANEOUS EMISSION PROBABILITIES AT RADIO FREQUENCIES" // PHYSICAL REVIEW, 69, 681, (1946)

A.P. Vinogradov^{*1}, A.A. Pukhov¹

¹ Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia

* a-vinogr@yandex.ru

Abstract

Since the article is written very briefly and without any references, to make it easier for the reader to understand the article, the translation is accompanied by an explanation of the formulas used. In particular, it explains why the Purcell factor is proportional to the local density of states. Attention is also drawn to the change in the directivity pattern of spontaneous radiation for an atom located inside the resonator.

Key words: Purcell factor, local density of states, directivity pattern, amplified spontaneous emission