УДК 535.14

КВАНТОВАНИЕ ПЛАЗМОНА

Андрианов Е.С.[1,2], Виноградов А.П. * [1,2]

[1] *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *1Федеральное государственное унитарное предприятие "Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова", Москва, Россия*

Статья поступила в редакцию 17.03.2023
Одобрена после рецензирования 30.05.2023
Принята к публикации 31.05.2023

Аннотация

Рассмотрен алгоритм квантования квазистатических полей.

Ключевые слова: плазмон, квантование квазистатических полей

EDN VPQTQD

Потребность в увеличении скорости обработки и передачи информации во многом определяет тенденции развития современной прикладной науки и технологий. В последнее время большие надежды для решения этой проблемы возлагаются на использование квантовых алгоритмов. Последние требуют умения управлять квантованными полями.

Однако наряду с улучшением применяемых алгоритмов немаловажным остается и вопрос об увеличении скорости исполнения каждого отдельного шага алгоритма. Так как наиболее быстрые процессы передачи информации связаны с электромагнитными полями, то одним из ограничений на этом пути увеличения производительности конкретного устройства является конечная скорость света. Иными словами, чем меньше устройство, тем быстрее оно может работать. В идеале размер устройства должен быть сравним с длиной волны. Здесь мы сталкиваемся с необходимостью описания квантовых свойств полей на субволновых масштабах.

Основным отличием классической и квантовой механики является дискретность многих величин в квантовой механике (КМ). Это объясняет одинаковость многих квантовых объектов. Абсолютно одинаковыми (неразличимыми) могут быть только дискретные величины. В классической физике наиболее близки в этом смысле свойства полей в различных резонаторах. Собственно, из этой аналогии при попытке описать дискретные уровни квантовых систем и выросла КМ.

Обычно в КМ квантуются линейные, гармонически изменяющиеся во времени поля. Основным допущением является утверждение о том, что любое поле можно представить как суперпозицию абсолютно одинаковых мод. Для выделения мод используют гипотетический ограниченный в пространстве объем с заданными на его внутренней поверхности эрмитовыми граничными условиями [1]. Для обобщения полученного ответа на случай безграничного пространства переходят к пределу $V \to \infty$. Иными словам, переходят от рядов Фурье к интегралам.

Зачем же тогда нужен предварительный этап мод? Почему сразу не работать с непрерывными полями, как это делают в электродинамике? Ответ в том, что описание полей не есть сама цель. Обычно поля играют роль внешней силы. И здесь важным оказывается квантовая природа полей и часто нелинейность материальных объектов взаимодействия. Широко распространен полуклассический подход, когда поля считаются классическими, а материальный объект (атом или молекула) квантовым. Однако если энергия взаимодействия оказывается сравнимой с энергией поля, возникают явления, выходящие за рамки полуклассического описания. Нужно учитывать дискретность порций передаваемой энергии, квантов.

Напомним основные моменты квантования ЭМ полей в вакууме. Рассмотрим в качестве объема квантования куб объема L^3. Предполагаем, что электрическое поле удовлетворяет волновому уравнению

*Автор, ответственный за переписку:Алексей Петрович Виноградов, a-vinogr@yandex.ru

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0, \tag{1}$$

а моды будем искать в виде $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_m \exp\left[-i\left(\omega_0 t - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}\right)\right]$, где $\mathbf{u}_m$ - собственные моды, задачи на собственные значения $\mathbf{k}_m$:

$$\begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{u}_m - k_m^2 \mathbf{u}_m = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_m = 0, \\ \mathbf{u}_m\left(r_i + L\right) = \mathbf{u}_m\left(r_i\right). \end{array} \tag{2}$$

В качестве собственных значений выступают волновые векторы $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega_0/c$, здесь $\hat{\mathbf{n}} = \{\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z\}$ единичный вектор, направленный параллельно распространению волны. Решение задачи 2 дает следующие значения возможных волновых векторов:

$$\begin{array}{l} k_x L = 2\pi n_x, \\ k_y L = 2\pi n_y, \\ k_z L = 2\pi n_z. \end{array} \tag{3}$$

Эти значения $\mathbf{k}$ образуют в импульсном пространстве кубическую решетку с шагом $(2\pi/L)$ так, что на каждую моду приходится объем $(2\pi/L)^3$ [1].

Заметим, что задача (2) является эрмитовой, так, что набор собственных функций образует полный базис в соответствующем гильбертовом пространстве [2]. Можно показать, что базис ортонормирован

$$\int_V \mathbf{u}_{m'} \cdot \mathbf{u}^*{}_m dV = V\delta_{mm'}, \tag{4}$$

а любое периодическое поле частоты ω_0 можно представить в виде линейной комбинации мод:

$$\mathbf{E} = \sum\nolimits_m E_m(t)\,\mathbf{u}_m, \quad \mathbf{B} = \sum\nolimits_m k_m^{-1} B_m(t)\,\nabla\times\ \mathbf{u}_m. \tag{5}$$

Перейдем к квантованию отдельной моды.

Так как поля принимают действительные значения, то (5) заменяется выражениями

$$\mathbf{E}_{re} = \frac{1}{2}\sum\nolimits_m \left(E_m(t)\,\mathbf{u}_m + E_m^*(t)\,\mathbf{u}_m^*\right), \quad \mathbf{B}_{re} = \frac{1}{2}\sum\nolimits_m k_m^{-1}\left(B_m(t)\,\nabla\times\ \mathbf{u}_m + B_m^*(t)\,\nabla\times\ \mathbf{u}_m^*\right) \tag{6}$$

Отметим, что, в отличие от уравнения Шрёдингера, которое является уравнением первого порядка по времени, волновое уравнение (1) второго порядка. Для устранения этого расхождения в схеме квантования Гейзенберга-Дирака исходят из Гамильтонова подхода к классической механике [3]. Последовательная процедура квантования гармонического поля следует этой схеме квантования [4], которая исходит из существования двух канонических (квадратурных) переменных p и q, описывающих это поле и связанных соотношением

$$p \sim \frac{\partial}{\partial t} q. \tag{7}$$

В задаче о квантовании ЭМ поля остается решить две проблемы. Найти кандидата на роль импульса и записать гамильтониан для моды.

Учтем, что ЭМ поле имеет поляризацию. В силу поперечности ЭМ полей ($\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$) можно ограничиться рассмотрением двух поляризаций полей, перпендикулярных волновому вектору. Для упрощения выкладок далее считаем, что ось z направлена вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, что позволяет рассматривать две различные поляризации $\{E_x, B_y, 0\}$ и $\{B_x, E_y, 0\}$ независимо. В каждом из этих случаев электрическое поле связано с временной производной магнитного поля:

$$-ik\hat{B}_y = \frac{1}{c}\left(\partial\hat{E}_x/\partial t\right), \text{ или } \hat{B}_y \sim (i/\omega)\,\partial\hat{E}_x/\partial t. \tag{8}$$

[1] Отметим, что при переходе к пределу $L \to \infty$ мы переходим в (5) от суммирования к интегрированию, вводя плотность состояний мод, которая определяется как число состояний в объеме d^3k.

Предполагается, что в этих переменных гамильтониан системы может быть выражен суммой двух слагаемых, первое из которых пропорционально $(p)^2$, и его можно отождествить с «кинетической энергией», а второе пропорционально $(q)^2$, и его можно отождествить с «потенциальной энергией». Иными словами, гамильтониан можно привести к виду гамильтониана гармонических колебаний $H = p^2 + \omega^2 q^2$. Далее, следуя процедуре квантования (см. [4, 6]), этим переменным ставятся в соответствие операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$, а их скобке Пуассона $\{p,\ q\}$ ставится в соответствие их коммутатор $i\hbar\{p,\ q\} \to [\hat{p},\ \hat{q}]$. Так как для канонических переменных $\{p,\ q\} = 1$, то $[\hat{p},\ \hat{q}] = i\hbar$.

Из уравнения (8) следует, что компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ связаны соотношением $k\ B \sim (1/c)\,\partial E/\partial t$, т.е. соотношением (7). Иными словами, эти поля могут претендовать на роль канонических переменных.

Так как граничные условия выполняются для каждой моды, то анализ их поведения можно проводить на примере одной из мод.

Интенсивность (энергия) электрического поля равна [5]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8\pi}E^2 &= \frac{1}{32\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m u_m + \sum_{m'=-\infty}^{\infty} E^*_{m'} u^*_{m'}\right)\left(\sum_{m''=-\infty}^{\infty} E_{m''} u_{m''} + \sum_{m'''=-\infty}^{\infty} E^*_{m'''} u^*_{m'''}\right) \\
&= \frac{1}{32\pi}\left(\begin{array}{l} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} E_m u_m \sum\limits_{m''=-\infty}^{\infty} E_{m''} u_{m''} + \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} E_m u_m \sum\limits_{m'''=-\infty}^{\infty} E^*_{m'''} u^*_{m'''} \\ + \sum\limits_{m'=-\infty}^{\infty} E^*_{m'} u^*_{m'} \sum\limits_{m''=-\infty}^{\infty} E_{m''} u_{m''} + \sum\limits_{m'=-\infty}^{\infty} E^*_{m'} u^*_{m'} \sum\limits_{m'''=-\infty}^{\infty} E^*_{m'''} u^*_{m'''} \end{array}\right) \\
&= \frac{1}{32\pi}\left[\begin{array}{l} \left(\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} E_m u_m\right)^2 + \left(\sum\limits_{m'=-\infty}^{\infty} E^*_{m'} u^*_{m'}\right)^2 \\ + \sum\limits_{m,m'''=-\infty}^{\infty} E_m E^*_{m'''} u_m u^*_{m'''} + \sum\limits_{m'=-\infty}^{\infty} E^*_{m'} E_{m''} u^*_{m'} u_{m''} \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Тогда гамильтониан принимает вид [1]

$$\begin{aligned}
cH &= \frac{1}{16\pi}\int_V \left(E\left(t,z\right) E^*\left(t,z\right) + B\left(t,z\right) B^*\left(t,z\right)\right) dV \\
&= \frac{1}{16\pi}\sum\nolimits_{m'm} E_{m'} E^*_m \int_V \mathbf{u}_{m'} \mathbf{u}^*_m dV + \frac{1}{16\pi}\sum\nolimits_{m'm} k_m^{-1} k_{m'}^{-1} B_{m'} B^*_m \int_V \left(\nabla \times \mathbf{u}_{m'}\right)\left(\nabla \times \mathbf{u}^*_m\right) dV \\
&= \frac{V}{16\pi}\sum\nolimits_m \left(E_m E^*_m + B_m B^*_m\right) = \frac{V}{8\pi}\sum\nolimits_m H_m.
\end{aligned} \tag{9}$$

Итак, мы имеем гамильтониан m-ой моды:

$$H_m = \frac{V}{8\pi}\left(E_m E^*_m + B_m B^*_m\right) = \frac{V}{8\pi}\left(\hat{E}_m \hat{E}^\dagger_m + \hat{B}_m \hat{B}^\dagger_m\right). \tag{10}$$

Считая полевые операторы эрмитовыми, имеем:

$$H_m = \frac{V}{8\pi}\left[\left(\hat{E}_m\right)^2 + \left(\hat{B}_m\right)^2\right]. \tag{11}$$

Для квантования ЭМ поля введем эрмитовы операторы полей $\hat{E}_m$ и $\hat{B}_m$. Для моды $\{E_x, B_y, 0\}$ эти операторы связаны операторным уравнением, являющимся аналогом уравнения Максвелла (8).

Переходя к каноническим переменным

$$\hat{p} = i\frac{\partial \hat{E}_x}{\partial t} = \omega \hat{B}_y \Rightarrow \hat{B}_y = \hat{p}/\omega, \tag{12}$$

запишем гамильтониан (11) в виде

$$H_m = \frac{V}{8\pi}\left[\left(\hat{E}_x\right)^2 + \left(\hat{B}_y\right)^2\right] = \frac{V}{8\pi\omega^2}\left(\hat{q}^2 + \hat{p}^2/\omega^2\right) = \left(\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{V}{4\pi}}\right)^2 \frac{1}{2}\left(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2\right). \tag{13}$$

Далее перейдем к безразмерным переменным

$$\hat{\kappa} = \frac{\sqrt{V/4\pi}}{\omega}\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\hat{q} = \sqrt{\frac{V/4\pi}{\hbar\omega}}\hat{E}_x \tag{14}$$

$$\hat{\pi}=\frac{\sqrt{V/4\pi}}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\hat{p}=\sqrt{\frac{V/4\pi}{\hbar\omega}}B_y, \tag{15}$$

в которых гамильтониан выглядит как гамильтониан квантового линейного осциллятора:

$$H_m=\frac{\hbar\omega V}{2}\left(\hat{\pi}^2+\hat{\kappa}^2\right). \tag{16}$$

В соответствии с методом квантования Гейзенберга-Дирака [4] скобки Пуассона двух переменных $\{A,B\}=\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial x}\right)$, где x,p - канонические координаты, заменяются их коммутатором. Для канонических переменных скобки Пуассона равны единице, а соответствующий коммутатор

$$[\hat{\kappa},\ \hat{\pi}]=i\hbar. \tag{17}$$

Введем далее операторы рождения и уничтожения [1]

$$\hat{a}=\left(\hat{\kappa}+i\hat{\pi}\right)/\sqrt{2}=\sqrt{\frac{V/4\pi}{\hbar\omega}}\left(\hat{E}_x+i\hat{B}_y\right), \tag{18}$$

$$\hat{a}^\dagger=\left(\hat{\kappa}-i\hat{\pi}\right)/\sqrt{2}=\sqrt{\frac{V/4\pi}{\hbar\omega}}\left(\hat{E}_x-i\hat{B}_y\right). \tag{19}$$

Окончательно гамильтониан принимает знакомый вид

$$\hat{H}_m=\hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m+\frac{1}{2}\hat{I}\right), \tag{20}$$

а полевые операторы выражаются через операторы рождения и уничтожения как

$$\hat{E}_x=\sqrt{\frac{\hbar\omega}{V/2\pi}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right), \tag{21}$$

$$\hat{B}_y=-i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{V/2\pi}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right). \tag{22}$$

Аналогичным способом квантуется и вторая мода.

Полевые операторы в общем случае являются суммой по всем возможным волновым векторам и соответствующим поляризациям:

$$\mathbf{E}_{re}=\sum\nolimits_{m,\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_m}{V}}\left(\mathbf{u}_{m,\alpha}\hat{a}_{m,\alpha}+\mathbf{u}^*_{m,\alpha}\hat{a}^\dagger_{m,\alpha}\right), \tag{23}$$

$$\mathbf{B}_{re}=\sum\nolimits_{m,\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_m}{V}}k_m^{-1}\left(\hat{a}^\dagger_{m,\alpha}\mathrm{curl}\,\mathbf{u}_{m,\alpha}+\hat{a}_{m,\alpha}\mathrm{curl}\,\mathbf{u}^*_{m,\alpha}\right). \tag{24}$$

Величина

$$E_{m0}=\sqrt{2\pi\hbar\omega_m/V} \tag{25}$$

имеет смысл величины электрического поля на один фотон.

Квантование ЭМ в среде представляет собой более трудную задачу. Эти трудности, возникшие еще при классическом рассмотрении ЭМ полей в среде, связаны с тем, что полный гамильтониан невозможно представить в виде суммы гамильтонианов среды и ЭМ поля. Т. о. в присутствии вещества отдельно определенный тензор энергии-импульса ЭМ поля не сохраняется. Только общий тензор энергии-импульса поля и вещества имеет однозначный физический смысл, и то, как его распределять между «электромагнитной» частью и «материальной» частью, зависит от предпочтения исследователя. Так в своих работах Минковский [5] определил плотность импульса световой волны, имеющей плотность энергии U как $g=(n/c)\,U=|\mathbf{D}\times\mathbf{B}|=\left(n^2/c^2\right)|\mathbf{E}\times\mathbf{H}|$, в то время как Абрахам [6] определял ее как $g=U/\left(nc\right)=|\mathbf{E}\times\mathbf{H}|/c^2$

Несовпадение этих результатов вело к двум различным выражениям для тензора энергии-импульса ЭМ поля. С тех пор было опубликовано множество работ, в которых высказывались аргументы за ту или другую форму (см. [7] и приведенные там ссылки). В работах Пайерлс показал, что (см. [8]) ни одно из выражений не является правильным. Другими словами, электромагнитная часть и материальная часть в полном импульсе могут быть распределены произвольно, пока импульс остается неизменным.

Наиболее последовательный подход для квантования поля в среде, известный на данный момент, состоит в одновременном квантовании электромагнитного поля и поляризации среды [9]. Однако для реализации такой схемы квантования необходимо задать некоторую модель среды. Одной из самых простых и наиболее часто используемых моделей среды является модель осцилляторов Лоренца. Она предполагает, что среда представляет собой распределённые в пространстве гармонические дипольные осцилляторы. Релаксация среды описывается не феноменологическими константами затухания, а связью резервуара фононов с каждым осциллятором среды. Гамильтониан системы «поле + осцилляторы среды + резервуары» является эрмитовым гамильтонианом взаимодействующих гармонических осцилляторов, квантование которого производится стандартным образом через введение операторов рождения и уничтожения. Собственные моды такой системы представляют собой коллективные колебания поля и среды, которые можно получить с помощью процедуры Фано диагонализации [10]. Однако, поскольку собственные колебания представляют собой связанные колебания поля и среды (поляритоны), при таком подходе трудно выделить именно колебания поля [11].

В статическом (квазистатическом) случае поля подчиняются не уравнениям Максвелла, а уравнениям Пуассона, что усугубляет проблему квантования плазмонных колебаний, локализованных на наночастице. Как известно [12, 13], статические поля, подчиняющиеся уравнению Пуассона, являются классическими и не квантуются. Электрическое и магнитное поля подчиняются различным, не связанным между собой уравнениям. Квазистатическое электрическое поле вместо уравнения (1) подчиняется уравнению $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0$. Таким образом, использовать магнитное поле как каноническую переменную уже не удается.

Все сказанное выше отчасти справедливо и для квазистатических полей. Задача о нахождении электрического и магнитного полей, как и в случае статики, разделяется на две независимые задачи, и применение уравнения (12) малоэффективно.

Для любой компоненты q ЭМ поля трудно подобрать физическую величину, способную играть роль ее кинетической энергии. Это связано с тем, что в случае квазистатики хотя поля и зависят от времени, но, так квазистатика предполагает, что длина волны много больше размера системы, то временные производные много меньше пространственных, так как первые определяются частотой (т.е. длиной волны), а вторые - размером включения. Пренебрегая временными производными, мы приходим к уравнениям статики. В частности, мал вклад в рассматриваемые электрические явления индуцированного магнитного поля. Как следствие, отсутствуют собственные решения в задаче о возбуждении частиц субволнового размера. Т.е. такие решения, что при нулевом внешнем поле существуют колебания. Единственное исключение – это случай отрицательной диэлектрической проницаемости. В этом случае существуют значения диэлектрической проницаемости, когда на определенной частоте отклик на внешнее поле может иметь полюс [14], и колебания (резонанс) возникают независимо от размера системы. Такие вещества называют плазмоподобными.

Ниже под плазмой мы понимаем систему электронов и ионов. Для простоты мы будем использовать приближение свободных электронов, т.е. считать, что в силу большой разности масс электронов и ионов последние считаются покоящимися, а электроны двигаются, находясь в среднем электрическом поле, созданным зарядами обоих знаков. Обычно рассматривают квазинейтральную плазму, т.е. считают, что средние плотности положительных и отрицательных зарядов совпадают и среднее электрическое поле равно нулю. Под действием внешнего электрического поля электроны начинают направленное по полю движение, упруго рассеиваясь на ионах, что приводит к конечной мнимой части диэлектрической проницаемости (электропроводности).

В простейшем виде теория диэлектрической проницаемости была развита Друде [15, 16]. В рамках этой теороии существуют частоты, когда действиетльная часть становится отрицательной. Ленгмюр показал, что в такой системе даже при отсутствии внешнего поля при нулевом значении диэлектрической проницаемости возможно возникновение долгоживущих флуктуаций, связанных с локальным разделением зарядов и, по существу, представляющих собой продольные коллективные колебания электронов. Для описания таких флуктуаций Ленгмюром был введен термин «плазмон» [17]. Таким образом, в системе без внешнего поля могут быть заряды и токи, связанные уравнением сохранения заряда, имеющего вид $\partial e/\partial t = \nabla \cdot \mathbf{j}$, что напоминает соотношение (7) и вселяет надежду на возможность квантования. Появляется возможно вместо уравнений Максвелла квантовать уравнение Ньютона, как, собственно, поступают при квантовании гармонического осциллятора.

Итак, предположим, что в некоторый момент времени возникает небольшая сферическая флуктуация в распределении заряда. Пусть внутри объема этой флуктуации электроны самопроизвольно сместились в одном направлении на некоторое расстояние x, и на поверхности сферы образовался поверхностный заряд $(en)\, x\cos\varphi$. Такое распределение поверхностных зарядов эквивалентно распределению поверхностных зарядов на диэлектрическом шаре с однородной поляризацией $P = enx$ [18]. Как известно [18], электрическое поле E внутри такой вспомогательной сферы равно $-4\pi P/3$. Учитывая, что $P = nex = nd$, где d – дипольный момент молекулы, из которой состоит вспомогательная диэлектрическая сфера, получаем, что $d = nex$ и уравнение Ньютона для движения электрона $\ddot{x} = eE/m_e$ можно переписать в виде $\frac{d^2x}{dt^2} = e^2\left(-4\pi\frac{P}{3m_e}\right)$

$$\frac{d^2 d_{pl}}{dt^2} = \frac{4\pi e^2 n}{3m_e} d_{pl} \tag{26}$$

Согласно этому уравнению дипольный момент будет совершать гармонические колебания с частотой $\omega_{pl} = \sqrt{4\pi e^2 n/3m}$. Этому движению соответствует гамильтониан

$$H = \frac{\left(d\left(d_{pl}\right)/dt\right)^2}{2} + \frac{\omega_{pl}^2 d_{pl}^2}{2}.$$

Очевидно, что этот дипольный момент равен среднему дипольному электрическому моменту флуктуации. Именно движение этого дипольного момента мы и будем квантовать. Для этого введем так называемые квадратурные операторы $\hat{Q}_m = \hat{d}_{pl}$ и $\hat{P}_m = d\left(\hat{d}_{pl}\right)/dt$. Коммутационное соотношение можно получить, переходя от уравнений Ньютона к уравнениям Гамильтона-Якоби [3]. Получающиеся при этом скобки Пуассона, согласно Дираку и заменяются коммутатором $\left[\hat{d}_{pl}, d\left(\hat{d}_{pl}\right)/dt\right] = i\hbar$ [4]. Гамильтониан же примет вид гамильтониана квантового гармонического осциллятора $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\omega_{pl}^2 \hat{Q}^2}{2}$.

Откуда получаем канонические переменные $\hat{q} = \sqrt{\frac{\omega_{pl}}{\hbar}}\hat{d}_{pl}$ и $\hat{p} = \sqrt{\frac{1}{\hbar\omega_{pl}}}\hat{\dot{d}}_{pl}$, подчиняющиеся, по определению, коммутационному соотношению $[\hat{q}, \hat{p}] = i$. На основании этого можно ввести операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}_d^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_d = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} \tag{27}$$

и получить гамильтониан в виде

$$H = \frac{\hbar\omega_{pl}}{2}\left(\hat{p}^2 + \hat{q}^2\right) = \hbar\omega_{pl}\left(\hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d + 1/2\right). \tag{28}$$

Чтобы закончить процедуру квантования плазмона, мы должны приравнять энергию дипольного момента $\mathbf{d}_{pl}$ к энергии плазмона $\hbar\omega_{pl}$. Чтобы найти эту энергию, мы можем найти электрическое поле, создаваемое этим диполем, и приравнять энергию этого электрического поля к энергии одного кванта. Дипольный момент однозначно определяет электрическое поле внутри и снаружи наночастицы.

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\mathbf{d}_{pl}/a^3, \; r < a \\ \left(3\left(\mathbf{n}\mathbf{d}_{pl}\right)\mathbf{n} - \mathbf{d}_{pl}\right)/r^3, \; r > a \end{cases} \tag{29}$$

Энергию этого поля необходимо приравнять к энергии одного кванта

$$\begin{aligned} \hbar\omega_{pl} = \tfrac{1}{8\pi}\int\limits_V d^3\mathbf{r}\left(\varepsilon_m(\omega) + \tfrac{\partial\varepsilon_m(\omega)}{\partial\omega}\right)\left|\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\right|^2 = \tfrac{1}{8\pi}\tfrac{\partial(\varepsilon_m(\omega))}{\partial\omega}\int\limits_{V_{in}} d^3\mathbf{r}\left|\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\right|^2 \\ +\tfrac{1}{8\pi}\int\limits_{V_{in}} d^3\mathbf{r}\varepsilon_m\partial(\omega)\left|\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\right|^2 + \tfrac{1}{8\pi}\int\limits_{V_{out}} d^3\mathbf{r}\varepsilon_{out}(\omega)\left|\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\right|^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{E}_d^*(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi_d^*$,

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{8\pi}\int\limits_{V_{in}} d^3\mathbf{r}\varepsilon_{in}(\omega)\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\left(-\nabla\varphi_d^*\right) + \tfrac{1}{8\pi}\int\limits_{V_{out}} d^3\mathbf{r}\varepsilon_{out}(\omega)\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\left(-\nabla\varphi_d^*\right) = \\ &= \tfrac{1}{8\pi}\int\limits_{V_{in}} d^3\mathbf{r}\nabla\left(\varepsilon_{in}(\omega)\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\right)\varphi_d^* + \tfrac{1}{8\pi}\int\limits_{V_{out}} d^3\mathbf{r}\nabla\left(\varepsilon_{out}(\omega)\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\right)\varphi_d^* - \\ &-\tfrac{1}{8\pi}\int\limits_{\Omega} d\Omega a^2\varphi_d^*\left(\mathbf{n}\mathbf{E}_{d,in}(\mathbf{r})\varepsilon_{in}(\omega) - \mathbf{n}\mathbf{E}_{d,out}(\mathbf{r})\varepsilon_{out}(\omega)\right) = 0, \end{aligned}$$

последние два слагаемых в правой части (30) равны нулю, и мы получаем

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon_{in}(\omega)\right)}{\partial\omega}\int\limits_{V_{in}} d^3\mathbf{r}\left|\mathbf{E}_d(\mathbf{r})\right|^2 = \frac{1}{8\pi}\frac{2\left(\omega_{pl}^0\right)^2}{\omega_{pl}^2}\frac{\mathbf{d}_{pl}^2}{a^6}\frac{4\pi a^3}{3} = \frac{\mathbf{d}_{pl}^2}{a^3}. \tag{31}$$

При получении последней оценки мы не учитывающей поглощения в металле и использовали теорию Друде для диэлектрической проницаемости металла [15]

$$\varepsilon_m(\omega) = 1 - \frac{\left(\omega_{pl}^0\right)^2}{\omega^2}, \tag{32}$$

что, учитывая (30), дает величину дипольного момента на один квант, равную

$$d_q = \sqrt{\hbar\omega_{pl}a^3} = \sqrt{3\hbar\omega_{pl}V/4\pi}, \tag{33}$$

или окончательно

$$\hat{\mathbf{d}}_{pl} = \mathbf{d}_q\left(\hat{a}_d^\dagger + \hat{a}_d\right). \tag{34}$$

Список литературы

[1] L. E. Ballentine, Quantum Mechanics (A Modern Development) World Scientific Publishing. - 1998. - 658 с.

[2] Н. Л. Кудрявцев, Курс математического анализа. - М.: Юрайт. 2012. - 352 с.

[3] Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике. - М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы. - 1966. - 300 с.

[4] П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики / Библиотека теоретической физики. - М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы. - 1979. - 479 с.

[5] Minkowski, H., Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, p. 53; Minkocvski,H. 1910 Math. Annnln 68, 472, 1908.

[6] Abmham, M. Rc. Circ. Mat. Palermo 28, p.1; Abraham, M. 1910 Rc. Circ. Mat. Palermo 30, p.33, 1909.

[7] В. Л. Гинзбург, В. А. Угаров, УФН 118, 175. - 1976.

[8] R.E. Peieres, Proc. R. Soc. Lond. A. 347, 475-491 (1976), Proc. R. Soc. Lond. A. 355, 141-151. - 1977.

[9] B. Huttner and S. M. Barnett, Physical Review A 46, 4306 (1992), T. G. Philbin, New Journal of Physics 14, 083043. - 2012.

[10] T. G. Philbin, New J. Phys. 14, 083043. - 2012; T. G. Philbin, New J. Phys. 12, 123008. - 2010.

[11] Shishkov, V. Y., Andrianov, E. S., Pukhov, A. A., & Vinogradov, A. P. Hermitian description of localized plasmons in dispersive dissipative subwavelength spherical nanostructures. Phys. Rev. B, 94(23), 235443, (2016).

[12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика в десяти томах / т. 2 . Теория поля. М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы. - 1988. - Т. 8. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука. - 1992.

[13] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков Квантовые поля. - М. «НАУКА», Главная редакция физико-математической литературы. - 1980. - 319 с.

[14] D. J. Bergman, Physics Reports 43, 377, 1978.

[15] В. Браун Диэлектрики. - Москва. ИЛ. - 1961. - 324 с.

[16] Борн М. Оптика. - Киев: ОНТИ НКТП. - 1937. - 796.

[17] L. Tonsk, I. Langmuir Phys Rev 33, 195, 1929).

[18] И. Е. Тамм, Основы электричества. - М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2003. - 193 с.

PLASMON QUANTIZATION

Andrianov E.S.[1*], **Vinogradov A.P.**[1,2]

[1] Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia
[2] Moscow institutes of physics and technology, Moscow region, Russia

[*] a-vinogr@yandex.ru

Abstract

The algorithm of local plasmon quantization is discussed.

Key words: plasmon, quantization of quasi-static fields