

# МОДЕЛЬ ВОЛОКОННОГО ЭРБИЕВОГО УСИЛИТЕЛЯ ДЛЯ АНАЛИЗА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА И ШУМОВ

Дорофеев А.В. \*<sup>1,2,3</sup>, Нечепуренко И.А.<sup>1</sup>, Базакуца А.П.<sup>3</sup>, Бутов О.В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Россия

<sup>2</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup> Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 30.05.2023

Одобрена после рецензирования 30.05.2023

Принята к публикации 31.05.2023

## Аннотация

Предложена модель эрбиевого волоконного усилителя, учитывающая основные процессы спонтанного и индуцированного излучения. Рассматривается неоднородное распределение вдоль оси волокна мощности накачки, полезного сигнала и шума. Проводится оценка величины шумов спонтанного излучения.

**Ключевые слова:** волоконные усилители, эрбиевые усилители, трехуровневая система, скоростные уравнения

EDN QZLXZH

## 1. Введение

Волоконные усилители и лазеры на основе кварцевого стекла, легированного эрбием, активно используются в современной волоконной оптике [1–6]. Эрбиевые усилители и лазеры, работающие на длинах волн около 1,5 мкм, используются в телекоммуникациях [7–11], оптическом зондировании [12–14] и радиофотонике [15, 16]. Особый интерес представляют одночастотные волоконно-оптические лазерные системы с узкой (порядка нескольких кГц) линией генерации [17–21], которые могут служить маломощными когерентными источниками в линиях связи со сверхвысокой плотностью каналов и в когерентной связи, а также в системах оптического зондирования. Для передачи сигналов на большие расстояния очень важна возможность усиления сигнала без существенного зашумления. Наиболее распространены усилители на основе волокон, допированных ионами эрбия [22, 23].

В рамках данной работы предложена модель эрбиевого волоконного усилителя, учитывающая основные процессы спонтанного и индуцированного излучения. Учитывается неоднородное распределение вдоль оси волокна мощности накачки, полезного сигнала и шума. Проводится оценка величины шумов спонтанного излучения.

## 2. Модель трехуровневой активной среды

Рассмотрим волоконный усилитель, в котором в качестве усиливающей среды выступает трехуровневая система (рис. 1). Накачка осуществляется путем перевода атома из основного состояния «1» в возбужденное состояние «3». Далее происходит быстрый по сравнению со всеми процессами, происходящими в системе, переход атома из состояния «3» в состояние «2».

Для описания ансамбля из многих атомов вводятся усредненные населенности уровней «1», «2», «3», которые определяются как отношение количества атомов в соответствующем состоянии  $N_i$  к полному числу атомов  $N$ :

$$n_i = N_i/N.$$

\* Автор, ответственный за переписку: Александр Викторович Дорофеев, adorofeenko@itae.ru

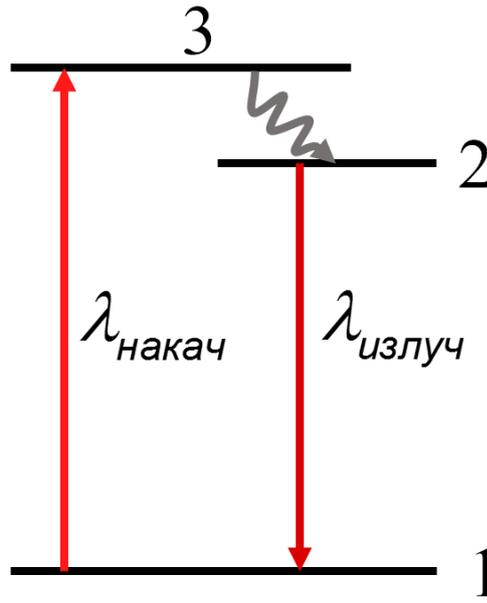


Рисунок 1 – Схема активной среды, имеющей три энергетических уровня

В лазерах на основе твердотельной накачки число атомов активной среды можно считать неизменным, поэтому  $N_1 + N_2 + N_3 = N$ , откуда следует уравнение для населенностей:

$$n_1 + n_2 + n_3 = 1.$$

Переходы между различными уровнями происходят за счет спонтанных, индуцированных и безызлучательных переходов. Введем вероятности переходов между уровнями в единицу времени (скорости переходов)

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{j \neq i} (W_{ji}^{cn} + W_{ji}^{und} + W_{ji}^{без}) n_j - \sum_{j \neq i} (W_{ij}^{cn} + W_{ij}^{und} + W_{ij}^{без}) n_i,$$

где  $W_{ij}^{cn}$ ,  $W_{ij}^{und}$  и  $W_{ij}^{без}$  – скорости спонтанного, индуцированного и безызлучательного переходов из состояния  $i$  в состояние  $j$  соответственно.

В случае трехуровневой системы вероятности большей части переходов полагают равной нулю. Вероятность безызлучательного перехода отлична от нуля для переходов  $3 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 1$ . Индуцированные и спонтанные переходы происходят между уровнями 1, 3 и 1, 2. В результате систему уравнений можно упростить:

$$\frac{dn_1}{dt} = (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{без}) n_2 + (W_{31}^{cn} + W_{31}^{und}) n_3 - (W_{12}^{und} + W_{13}^{und}) n_1, \quad (1)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = W_{12}^{und} n_1 + W_{32}^{без} n_3 - (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{без}) n_2, \quad (2)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = W_{13}^{und} n_1 - W_{31}^{cn} n_3 - W_{31}^{und} n_3 - W_{32}^{без} n_3. \quad (3)$$

В случае, когда безызлучательные переходы с 3-го на 2-й уровень происходят быстрее любых других процессов  $W_{31}^{und} \ll W_{32}^{без}$ :

$$\frac{dn_1}{dt} = (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{без}) n_2 - W_{12}^{und} n_1 - W_{13}^{und} n_1, \quad (4)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = W_{12}^{und} n_1 + W_{32}^{без} n_3 - (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{без}) n_2, \quad (5)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = W_{13}^{und} n_1 - W_{32}^{\beta es} n_3 \quad (6)$$

Быстрый переход из состояния «3» в состояние «2» приводит к тому, что  $n_3 \ll n_1$ . Вероятность перехода  $W_{13}^{und}$  зависит от мощности накачки, которая, вообще говоря, может зависеть от времени, поэтому уравнение на инверсию населенности «3» представляет собой уравнение с переменным коэффициентом. Для упрощения уравнения сделаем замену переменных  $n_3(t) = \tilde{n}_3(t) e^{-W_{32}^{\beta es} t}$ :

$$\frac{d\tilde{n}_3}{dt} = e^{W_{32}^{\beta es} t} W_{13}^{und} n_1.$$

Решением этого уравнения является

$$\tilde{n}_3(t) = \int_0^t e^{W_{32}^{\beta es} t} W_{13}^{und}(t) n_1(t) dt + C,$$

где  $C$  – константа, определяющая населенность уровня «3» в отсутствие накачки. Населенность верхнего уровня в волоконных усилителях пренебрежимо мала в силу малости тепловых флуктуаций по сравнению с энергией перехода  $kT \ll \hbar\omega$ , поэтому  $C = 0$ . В результате получим искомую населенность:

$$n_3(t) = e^{-W_{32}^{\beta es} t} \int_0^t e^{W_{32}^{\beta es} t} W_{13}^{und} n_1 dt.$$

С учетом большой скорости безызлучательных переходов между уровнями «3» и «2»  $W_{32}^{\beta es} \gg W_{13}^{und}$  находим:

$$n_3(t) \approx \frac{W_{13}^{und}}{W_{32}^{\beta es}} n_1.$$

Из найденного выражения явно следует, что  $n_3 \ll n_1$ . В результате система уравнений, описывающая трехуровневую активную среду, приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{\beta es}) n_2 - W_{12}^{und} n_1 - W_{13}^{und} n_1, \\ \frac{dn_2}{dt} &= W_{12}^{und} n_1 + W_{13}^{und} n_1 - (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{\beta es}) n_2. \end{aligned}$$

При постоянной накачке в стационарном режиме эта система преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{\beta es}}{W_{12}^{und} + W_{13}^{und}} n_2, \\ n_2 &= \frac{W_{12}^{und} + W_{13}^{und}}{W_{21}^{und} + W_{21}^{cn} + W_{21}^{\beta es}} n_1. \end{aligned}$$

Получились два одинаковых уравнения, что обусловлено сохранением частиц:  $n_1 + n_2 = 1$ . С учетом этого условия находим:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{W_{21}^{und} + W_{21}^{cn} + W_{21}^{\beta es}}{W_{21}^{und} + W_{21}^{cn} + W_{21}^{\beta es} + W_{12}^{und} + W_{13}^{und}}, \\ n_2 &= \frac{W_{12}^{und} + W_{13}^{und}}{W_{21}^{und} + W_{21}^{cn} + W_{21}^{\beta es} + W_{12}^{und} + W_{13}^{und}}. \end{aligned}$$

Заметим, что скорости индуцированных переходов равны и пропорциональны интенсивности падающего поля:

$$W_{21}^{und} = W_{12}^{und} = \alpha_2 I_{21},$$

$$W_{13}^{und} = \alpha_3 I_{нак}.$$

Здесь  $I_{21}$  – интенсивность (объемная плотность энергии) излучения на частоте перехода «2» в «1»,  $I_{нак}$  – интенсивность накачки,  $\alpha_i$  – коэффициенты пропорциональности между интенсивностью падающей волны и скоростью перехода, которые можно найти, как коэффициенты Эйнштейна. Скорость спонтанного излучения  $W_{21}^{cn}$  обозначим как

$$W_{21}^{cn} \equiv \gamma_1.$$

Скорость безызлучательных переходов обычно в несколько раз меньше, чем скорость спонтанных переходов. Суммарную скорость перехода атома из возбужденного состояния в основное обозначим как  $\gamma_0 = W_{21}^{cn} + W_{21}^{бес}$ . Отношение скорости спонтанного излучения к общей скорости перехода из возбужденного состояния в основное называют квантовой эффективностью  $\eta = W^{cn} / (W^{cn} + W^{бес})$ . Тогда скорость безызлучательных переходов может быть выражена через скорость спонтанных переходов и квантовую эффективность как  $W_{21}^{бес} = (1 - \eta) \gamma_0$ .

С учетом этих обозначений решения могут быть представлены в виде:

$$n_1 = \frac{\alpha_2 I_{21} + \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}$$

$$n_2 = \frac{\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}$$

Инверсия населенности  $D = n_2 - n_1$ :

$$D = \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}.$$

В отсутствие сигнала при малой накачке  $D = -1$ , а при стремлении накачки к бесконечности  $D \rightarrow 1$ .

### 3. Распространение сигнала в активном волноводе

Рассмотрим сначала задачу о распространении сигнала с начальной интенсивностью  $I$  по однородной активной среде длиной  $\Delta l$  (рис. 2).

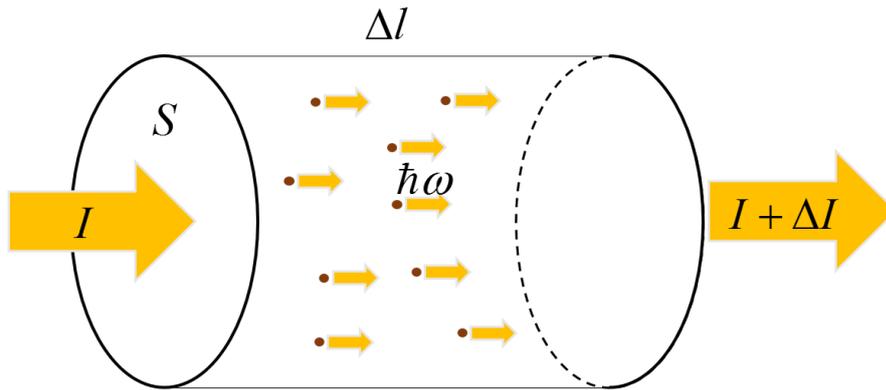


Рисунок 2 – Усиление сигнала за счет индуцированных переходов в малом объеме

На выходе из активной среды интенсивность сигнала составит  $I + \Delta I$ , где  $\Delta I$  обеспечено индуцированными переходами в среде. Время распространения сигнала по активной среде составляет  $\Delta l = v_{gp} \Delta t$ , где  $v_{gp}$  – групповая скорость. За данное время будет излучена энергия,  $\Delta E = N \times D \times \hbar\omega \alpha_2 I_{cu2} \Delta t$ , где  $N$  – число атомов в рассматриваемом объеме. Таким образом:

$$\Delta I = \frac{\Delta E}{S \Delta l} v_{gp} = n_a \times D \times \hbar\omega \alpha_2 I_{cu2} \Delta l.$$

При переходе к пределу малых  $\Delta l$  получим уравнение на интенсивность сигнала:

$$\frac{dI_{cu2}}{dz} = n_a D \hbar\omega \alpha_2 I_{cu2}.$$

Используя найденное выше выражение для инверсной населенности, получим нелинейное уравнение, описывающее распространение сигнала в однородной активной среде:

$$\frac{dI_{cu2}}{dz} = n_a \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{cu2} + \alpha_3 I_{нак}} \hbar\omega \alpha_2 I_{cu2}.$$

Здесь мы считали, что интенсивность на частоте перехода полностью определяется интенсивностью сигнала  $I_{21} = I_{cu2}$ , т.е. пренебрегали спонтанным излучением. Учет спонтанного излучения мы произведем в следующем разделе.

Для анализа экспериментальных данных необходимо перейти к терминам мощности. В общем случае для пересчета из интенсивности в мощность необходимо учесть неоднородность распределения ионов эрбия и неоднородность интенсивности фундаментальной моды:

$$\frac{dP_{cuз}}{dz} = \int n_a(\vec{r}) \frac{\alpha_3 I_{нак}(\vec{r}) - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{cuз}(\vec{r}) + \alpha_3 I_{нак}(\vec{r})} \hbar\omega\alpha_2 I_{cuз}(\vec{r}) dS.$$

Концентрацию ионов эрбия в сердцевине  $n_a$  и распределение интенсивности поля накачки и сигнала в сердцевине (с учетом малой разницы показателей преломления сердцевины и оболочки) можно приближенно считать постоянными. Тогда в пределах сердцевины:

$$n_a(\vec{r}) = n_a,$$

$$I_{нак}(\vec{r}) = \frac{\rho_{нак} P_{нак}}{\pi a^2},$$

$$I_{cuз}(\vec{r}) = \frac{\rho_{cuз} P_{cuз}}{\pi a^2}.$$

Здесь  $\rho_{нак}$  – доля поля накачки,  $\rho_{cuз}$  – доля сигнала, распространяющихся в сердцевине. В результате получим:

$$\frac{dP_{cuз}}{dz} = n_a \hbar\omega\alpha_2 \rho_{cuз} \frac{\alpha_3 \rho_{нак} P_{нак} - \gamma_0 \pi a^2}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{cuз} P_{cuз} + \alpha_3 \rho_{нак} P_{нак}} P_{cuз}.$$

Доля мощности в сердцевине волокна может быть вычислена при известном эффективном показателе преломления фундаментальной моды  $n_{эфф}$ :

$$\rho = 1 - \frac{n_c - n_{эфф}}{n_c - n_{об}} \frac{K_1^2(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об}))}{K_0(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об})) K_2(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об}))}.$$

Эффективный показатель преломления фундаментальной моды может быть вычислен путем решения дисперсионного уравнения

$$\frac{J_1(a^2 k_0^2 (n_c - n_{эфф}))}{(n_c - n_{эфф}) J_0(a^2 k_0^2 (n_c - n_{эфф}))} = - \frac{K_1(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об}))}{(n_{эфф} - n_{об}) K_0(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об}))}.$$

#### 4. Шумы спонтанного излучения: расчет из эквивалентной мощности шумов

Распространен метод расчета шумов на основе того факта, что мощность спонтанного излучения равна мощности индуцированного излучения при условии, что в моде находится 1 фотон. Оказывается, наличие энергии  $h\nu$  в каждой моде из диапазона частот  $\nu \div \nu + \Delta\nu$  ( $\Delta\nu$  – окно выходного фильтра) соответствует распространению излучения мощностью

$$P_0 = h\nu\Delta\nu, \tag{7}$$

называемой эквивалентной мощностью шума.

Действительно, рассмотрим отрезок волокна длиной  $L$ . В каждой моде находится энергия  $h\nu$ , соответствующая погонная плотность энергии равна  $\frac{h\nu}{L}$ , а поток энергии –  $\frac{h\nu}{L} \frac{c}{n}$  (здесь  $\frac{c}{n}$  – скорость волны). Моды расположены на расстоянии  $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$  по оси волновых чисел, и они создают поток  $P_0 = \frac{L}{2\pi} \left(\frac{h\nu}{L} \frac{c}{n}\right) \int_{\Delta\nu} \frac{dk}{d\nu} d\nu$ . Заметим, что  $\frac{1}{2\pi} \frac{dk}{d\nu} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c}$ , так что  $P_0 = L \left(\frac{h\nu}{L} \frac{c}{n}\right) \frac{n}{c} \Delta\nu$ . Получаем результат (7).

Эквивалентная мощность не является физически измеримой. Это воображаемая величина, используемая для расчетов спонтанного излучения.

Оценка этой величины для окна  $\Delta\lambda = 0,1$  нм:  $P_0 = h\nu\Delta\nu = \frac{hc^2}{\lambda^3} \Delta\lambda = 1.2 \times 10^{-9}$  Вт = –59 дБм.

#### 5. Шумы, обусловленные спонтанным излучением

Расчет интенсивности спонтанного излучения удобно проводить, исходя из фактического (экспериментально измеренного) времени продольной релаксации с учетом квантовой эффективности излучения.

Полная интенсивность на частоте перехода активной среды  $I_{21}$  складывается из интенсивности сигнала  $I_{cuз}$  и интенсивности шумов  $I_{шум}$ . Интенсивность шумов определяется спонтанными и индуцированными переходами. Усиление шума за счет индуцированных переходов может быть описано теми

же соотношениями, что и усиление сигнала. Описание спонтанного излучения требует учета геометрии системы. Накладывание шума на сигнал происходит с учетом их пространственного разделения. В случае волоконных усилителей детектируется тот шум спонтанного излучения, который распространяется в качестве моды сердцевин. Шумы, распространяющиеся в виде оболочечных мод, могут быть успешно отфильтрованы. Спонтанное излучение, выходящее за пределы волокна, определяется апертурой оболочки волокна и оказывает наименьшее влияние на выходные шумы.

Эффективно «одномерный» характер поведения излучения в оптических волокнах позволяет упростить описание спонтанного излучения. Заметим, что мощность спонтанного излучения от малого объема составляет  $\Delta P_{cn} = S \Delta l n_a n_2 \hbar \omega \gamma_1$ , где  $n_2$  – населенность верхнего уровня,  $\gamma_1$  – скорость спонтанного излучения. Часть этого излучения попадает в моду сердцевин. Скорость такого излучения  $\tilde{\gamma}_1$  значительно меньше, чем полная скорость излучения  $\gamma_1$ . Таким образом, прибавка к спонтанному излучению в основную моду составит  $\Delta I_{cn} = \Delta P_{cn}/S = \Delta l n_a n_2 \hbar \omega \tilde{\gamma}_1$ .

Населенность верхнего уровня  $n_2$  может быть выражена через инверсную населенность  $D = n_2 - n_1$  и условие сохранения числа частиц  $n_2 + n_1 = 1$ . В результате  $\Delta I_{cn} = \Delta l n_a \frac{D+1}{2} \hbar \omega \tilde{\gamma}_1$ .

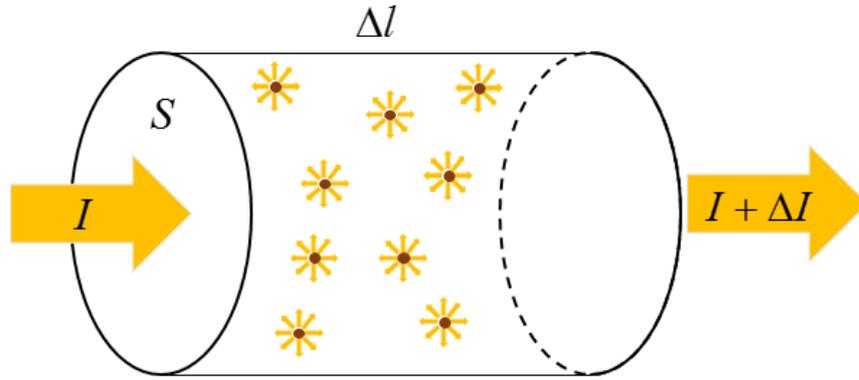


Рисунок 3 – Увеличение интенсивности шумов за счет спонтанных переходов атомов в малом объеме

Таким образом, на выходе из усилителя наблюдается сумма сигнала и шума, и интенсивность такого шума задается уравнением

$$\frac{dI_{шум}}{dz} = n_a D \hbar \omega \alpha_2 I_{шум} + n_a \frac{1+D}{2} \hbar \omega \tilde{\gamma}_1.$$

Кроме того, необходимо учесть, что спонтанное излучение возникает на обоих концах волновода, поэтому полная интенсивность складывается из трех компонент:

$$I_{21} = I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-.$$

Для шумов спонтанного излучения, распространяющихся в обратном направлении, можно также записать уравнение:

$$-\frac{dI_{шум}^-}{dz} = n_a D \hbar \omega \alpha_2 I_{шум}^- + n_a \frac{1+D}{2} \hbar \omega \tilde{\gamma}_1.$$

Заметим, что  $D = \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}$ , поэтому

$$\begin{aligned} n_a \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}} \hbar \omega \alpha_2 I_{шум} + n_a \frac{\alpha_3 I_{нак} + \alpha_2 I_{21}}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}} \hbar \omega \tilde{\gamma}_1 &= \\ = n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0) \alpha_2 I_{шум} + (\alpha_3 I_{нак} + \alpha_2 I_{21}) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом  $I_{21} = I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-$  может быть получена замкнутая система уравнений на интенсивность сигнала и шума в волоконном усилителе:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{сиг}}{dz} &= n_a \hbar \omega \alpha_2 I_{сиг} \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-) + \alpha_3 I_{нак}}, \\ \frac{dI_{шум}^+}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0) \alpha_2 I_{шум}^+ + (\alpha_3 I_{нак} + \alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 + 2\alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-) + \alpha_3 I_{нак}}, \\ -\frac{dI_{шум}^-}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0) \alpha_2 I_{шум}^- + (\alpha_3 I_{нак} + \alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 + 2\alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-) + \alpha_3 I_{нак}}. \end{aligned}$$

По аналогии с уравнениями для сигнала перейдем от терминов интенсивности к терминам мощности:

$$I_{\text{нак}}(\vec{r}) = \frac{\rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}{\pi a^2},$$

$$I_{\text{сиг}}(\vec{r}) = \frac{\rho_{\text{сиг}} P_{\text{сиг}}}{\pi a^2},$$

$$I_{\text{шум}}^-(\vec{r}) = \frac{\rho_{\text{шум}} P_{\text{шум}}^-}{\pi a^2},$$

$$I_{\text{шум}}^+(\vec{r}) = \frac{\rho_{\text{шум}} P_{\text{шум}}^+}{\pi a^2}.$$

При условии фильтрации шумов оболочки  $\rho_{\text{шум}} \equiv \rho_{\text{сиг}}$ . С учетом этого факта запишем уравнения на мощность сигнала и шумов:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{сиг}}}{dz} &= n_a \hbar \omega \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{сиг}} \frac{\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ \frac{dP_{\text{шум}}^+}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2) \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{шум}}^+ + \pi a^2 (\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} + \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ -\frac{dP_{\text{шум}}^-}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2) \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{шум}}^- + \pi a^2 (\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} + \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}. \end{aligned}$$

Заметим, что в общем случае интенсивность накачки зависит от координаты. Это приводит к неоднородному усилению вдоль длины усилителя. При малой накачке усилителя в нем могут быть области, в которых сигнал поглощается за счет переходов  $1 \rightarrow 2$ .

## 6. Поглощение мощности накачки

По аналогии с предыдущим, для мощности накачки может быть записано уравнение:

$$\frac{dI_{\text{нак}}}{dz} = (n_3 - n_1) n_a \hbar \omega \alpha_3 I_{\text{нак}}.$$

Заметим, что  $n_3 - n_1 \approx -n_1 = \frac{D-1}{2}$ . В результате уравнение для мощности накачки имеет вид

$$\frac{dI_{\text{нак}}}{dz} = \frac{D-1}{2} n_a \hbar \omega \alpha_3 I_{\text{нак}}.$$

Тогда можем записать  $\frac{dI_{\text{нак}}}{dz} = -n_a \hbar \omega \frac{\gamma_0 + \alpha_2 (I_{\text{сиг}} + I_{\text{шум}}^+ + I_{\text{шум}}^-)}{\gamma_0 + 2\alpha_2 (I_{\text{сиг}} + I_{\text{шум}}^+ + I_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 I_{\text{нак}}} \alpha_3 I_{\text{нак}}$ . В рамках описанного выше приближения уравнение на мощность накачки преобразуется к виду:

$$\frac{dP_{\text{нак}}}{dz} = -n_a \hbar \omega \frac{\gamma_0 \pi a^2 + \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}} \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}.$$

Таким образом, получены уравнения, описывающие распространение излучения накачки и сигнала в волоконном усилителе. При усилении слабых сигналов основной вклад в шумы вносят внутренние шумы усилителя, определяющиеся усиленным спонтанным излучением.

Полная система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{сиг}}}{dz} &= n_a \hbar \omega \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{сиг}} \frac{\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ \frac{dP_{\text{шум}}^+}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{шум}} - \gamma_0 \pi a^2) \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{шум}}^+ + \pi a^2 (\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} + \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ -\frac{dP_{\text{шум}}^-}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2) \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{шум}}^- + \pi a^2 (\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} + \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ \frac{dP_{\text{нак}}}{dz} &= -n_a \hbar \omega \frac{\gamma_0 \pi a^2 + \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}} \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}. \end{aligned} \tag{8}$$

В качестве граничных условий для данной системы выступают условия на равенство нулю интенсивности шумов на соответствующих концах усилителя и заданное значение интенсивности сигнала на входе в усилитель:

$$P_{сиг}(0) = I_0,$$

$$P_{шум}^+(0) = 0,$$

$$P_{шум}^-(L) = 0,$$

$$P_{нак}(0) = P_{нак}^0.$$

Здесь  $L$  – длина усилителя. Полученная система уравнений позволяет вычислить отношение сигнал/шум ( $P_{сиг}(L)/P_{шум}^+(L)$ ) в произвольном усилителе, в котором активная среда может быть описана трехуровневой схемой. К таким средам относится в том числе активная среда, представляющая собой стекло, легированное ионами эрбия.

## 7. Заключение

Предложена модель волоконного усилителя на основе стекла, допированного ионами эрбия, с учетом спонтанного излучения усиливающих атомов и индуцированного излучения, т.е. усиления сигнала и шумов спонтанного излучения. Модель учитывает пространственную неоднородность излучения накачки, полезного сигнала, а также компонент шума, распространяющихся в обоих направлениях. Проведена оценка интенсивности собственных шумов в волокне.

## Список литературы

- [1] J. Kringlebotn, J.-L. Archambault, L. Reekie, J. Townsend, G. Vienne, D. Payne. Highly-efficient, low-noise grating-feedback Er<sup>3+</sup>:Yb<sup>3+</sup> codoped fibre laser. *Electronics Letters* 30, 972-973 (1994).
- [2] A. Bellemare. Continuous-wave silica-based erbium-doped fibre lasers. *Progress in Quantum Electronics* 27, 211-266 (2003).
- [3] D. Brida, G. Krauss, A. Sell, A. Leitenstorfer. Ultrabroadband Er: fiber lasers. *Laser & Photonics Reviews* 8, 409-428 (2014).
- [4] P.D. Dragic, M. Cavillon, J. Ballato. Materials for optical fiber lasers: A review. *Applied Physics Reviews* 5, 041301 (2018).
- [5] C. Shang, Y. Zhang, H. Qin, B. He, C. Zhang, J. Sun, J. Li, J. Ma, X. Ji, L. Xu. Review on wavelength-tunable pulsed fiber lasers based on 2D materials. *Optics & Laser Technology* 131, 106375 (2020).
- [6] T. Jiang, K. Yin, C. Wang, J. You, H. Ouyang, R. Miao, C. Zhang, K. Wei, H. Li, H. Chen. Ultrafast fiber lasers mode-locked by two-dimensional materials: review and prospect. *Photonics Research* 8, 78-90 (2020).
- [7] U. Keller. Recent developments in compact ultrafast lasers. *Nature* 424, 831 (2003).
- [8] D. Wei, T. Li, Y. Zhao, S. Jian. Multiwavelength erbium-doped fiber ring lasers with overlap-written fiber Bragg gratings. *Optics letters* 25, 1150-1152 (2000).
- [9] S. Kim, J. Park, S. Han, Y.-J. Kim, S.-W. Kim. Coherent supercontinuum generation using Er-doped fiber laser of hybrid mode-locking. *Optics letters* 39, 2986-2989 (2014).
- [10] S. Zhu, L. Shi, B. Xiao, X. Zhang, X. Fan. All-optical tunable microlaser based on an ultrahigh-Q erbium-doped hybrid microbottle cavity. *ACS Photonics* (2018).
- [11] J. Rönn, L. Karvonen, C. Kauppinen, A.P. Perros, N. Peyghambarian, H. Lipsanen, A. Säynätjoki, Z. Sun. Atomic layer engineering of Er-ion distribution in highly doped Er: Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> for photoluminescence enhancement. *ACS Photonics* 3, 2040-2048 (2016).
- [12] Y. Gong, Y.-J. Rao, Y. Guo, Z.-L. Ran, Y. Wu. Temperature-insensitive micro Fabry-Perot strain sensor fabricated by chemically etching Er-doped fiber. *IEEE Photonics Technology Letters* 21, 1725-1727 (2009).
- [13] R.A. Pérez-Herrera, M.A. Quintela, M. Fernández-Vallejo, A. Quintela, M. López-Amo, J.M. López-Higuera. Stability comparison of two ring resonator structures for multiwavelength fiber lasers using highly doped Er-fibers. *Journal of Lightwave Technology* 27, 2563-2569 (2009).

- [14] S. Zheng, M. Ghandehari, J. Ou. Photonic crystal fiber long-period grating absorption gas sensor based on a tunable erbium-doped fiber ring laser. *Sensors and Actuators B: Chemical* 223, 324-332 (2016).
- [15] Y.-N. Tan, L. Jin, L. Cheng, Z. Quan, M. Li, B.-O. Guan. Multi-octave tunable RF signal generation based on a dual-polarization fiber grating laser. *Optics express* 20, 6961-6967 (2012).
- [16] M. Guionie, L. Frein, F. Bondu, A. Carré, G. Loas, E. Pinsard, B. Cadier, M. Alouini, M. Romanelli, M. Vallet, "Dual-polarization DFB fiber lasers as optical phase-locked microwave sources in the 1-10 GHz range," in *Fiber Lasers and Glass Photonics: Materials through Applications*, 2018, p. 106832G.
- [17] K. Iwatsuki, H. Okamura, M. Saruwatari. Wavelength-tunable single-frequency and single-polarisation Er-doped fibre ring-laser with 1.4 kHz linewidth. *Electronics Letters* 26, 2033-2035 (1990).
- [18] G. Ball, W. Morey. Compression-tuned single-frequency Bragg grating fiber laser. *Optics letters* 19, 1979-1981 (1994).
- [19] V. Mizrahi, D.J. DiGiovanni, R.M. Atkins, S.G. Grubb, Y.-K. Park, J.-M. Delavaux. Stable single-mode erbium fiber-grating laser for digital communication. *Journal of Lightwave technology* 11, 2021-2025 (1993).
- [20] X. Dong, N.Q. Ngo, P. Shum, H.-Y. Tam, X. Dong. Linear cavity erbium-doped fiber laser with over 100 nm tuning range. *Optics express* 11, 1689-1694 (2003).
- [21] S. Popov, O. Butov, A. Bazakutsa, M.Y. Vyatkin, Y.K. Chamorovskii, A. Fotiadi. Random lasing in a short Er-doped artificial Rayleigh fiber. *Results in Physics* 16, 102868 (2020).
- [22] R.J. Mears, L. Reekie, I. Jauncey, D.N. Payne. Low-noise erbium-doped fibre amplifier operating at 1.54  $\mu\text{m}$ . *Electronics Letters* 19, 1026-1028 (1987).
- [23] A. Naji, B.A. Hamida, X. Cheng, M.A. Mahdi, S. Harun, S. Khan, W. Al-Khateeb, A. Zaidan, B. Zaidan, H. Ahmad. Review of erbium-doped fiber amplifier. *International Journal of the Physical Sciences* 6, 4674-4689 (2011).

## MODEL OF ERBIUM FIBER AMPLIFIER FOR AN ANALYSIS OF PROPAGATION OF SIGNAL AND NOISE

Dorofeenko A.V.<sup>1,2,3\*</sup>, Nechepurenko I.A.<sup>1</sup>, Bazakutsa A.P.<sup>3</sup>, Butov O.V.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Moscow institutes of physics and technology, Moscow region, Russia

<sup>3</sup> Institute of Radio Engineering and Electronics named after V.A. Kotelnikov RAS, Moscow, Russia

\* adorofeenko@itae.ru

### Abstract

A model of an erbium fiber amplifier is proposed that takes into account main processes of spontaneous and induced emission. A nonuniform pump power, signal, and noise distribution along the fiber is taken into account. An estimate is made of the magnitude of spontaneous emission noise.

**Key words:** fiber amplifiers, erbium amplifiers, three-level system, rate equations